

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
ARCHIVE

for

FEB 21 '58

RATIONAL MECHANICS
and
ANALYSIS

Edited by

C. TRUESDELL

Volume 1, Number 1



SPRINGER-VERLAG
BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG
(Postverlagsort Berlin · 24. 9. 1957)

Mechanicam vero duplicem Veteres constituerunt: Rationalem quae per Demonstrationes accurate procedit, & Practicam. Ad practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique Mechanica nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut Mechanica omnis a Geometria ita distinguitur, ut quicquid accuratum sit ad Geometriam referatur, quicquid minus accuratum ad Mechanicam. Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus.

NEWTON

La généralité que j'embrasse, au lieu d'éblouir nos lumières, découvrira plutôt les véritables loix de la Nature dans tout leur éclat, et on y trouvera des raisons encore plus fortes, d'en admirer la beauté et la simplicité.

EULER

Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mechanique en devenir une nouvelle branche ...

LAGRANGE

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS nourishes the discipline of mechanics as a deductive, mathematical science in the classical tradition and promotes pure analysis, particularly in contexts of application. Its purpose is to give rapid and full publication to researches of exceptional moment, depth, and permanence.

Each memoir must meet a standard of rigor set by the best work in its field. Contributions must consist largely in original research; on occasion, an expository paper may be invited.

English, French, German, Italian, and Latin are the languages of the Archive. Authors are urged to write clearly and well, avoiding an excessively condensed or crabbed style.

Manuscripts intended for the Archive should be submitted to an appropriate member of the Editorial Board.

The ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS appears in numbers struck off as the material reaches the press; five numbers constitute a volume. Subscriptions may be entered through any agent. The price is DM 96.— per volume.

Notice is hereby given that for all articles published exclusive rights in all languages and countries rest with Springer-Verlag. Without express permission of Springer-Verlag, no reproduction of any kind is allowed.

Authors receive gratis 75 offprints.

The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory

Part I

A. E. GREEN & R. S. RIVLIN

1. Introduction

In recent years a number of writers have formulated rheological equations of state for non-linear visco-elastic materials. A review of the subject up to 1952 has been given by TRUESDELL (1952, 1953). RIVLIN & ERICKSEN (1955) and RIVLIN (1955) have proposed a theory in which the components of stress at time t in an element of material depend only on the gradients of displacement, velocity, acceleration, second acceleration, ..., $(n-1)^{\text{th}}$ acceleration in that element at time t . Some special problems in this theory have been solved by RIVLIN (1956).

Other aspects of the mechanics of non-linear materials have been considered by NOLL (1955), particularly with reference to the invariance requirements for "hygrosteric" materials and various special cases of these materials have been examined, including the theory of "hypo-elastic" materials proposed by TRUESDELL (1955). The relation between the theories of hypo-elasticity and plasticity has been studied by GREEN (1956a, b).

OLDROYD (1950) suggested that the right invariance properties which must be satisfied by a rheological equation of state can most readily be recognised if the frame of reference is a coordinate system convected with the material. Using this procedure he formulated rheological equations of state of various types for visco-elastic materials.

In the present paper we adopt a procedure which is akin to that employed by RIVLIN & ERICKSEN (1955) in their work on the stress-deformation relations for isotropic materials. In § 2 we assume that the stress in a rectangular Cartesian coordinate system at time t depends on the displacement gradients at time t and at N previous instants of time in the interval 0 to t . We then determine the limitations imposed on the stress-deformation relation by the restriction that if the body is subjected to a rigid rotation and the reference system is rotated with the body, the stress is unaltered by the rigid-body rotation. In § 3, the further restrictions imposed on the stress-deformation relation by isotropy of the material are derived.

In § 4, we return to the case discussed in § 2 and allow the number N to tend to infinity so that certain functions in the stress-deformation relations are replaced by functionals. It is then shown that these functionals may be expressed

to any desired approximation by the sum of a number of multiple integrals. In § 5 the limitations imposed on the form of these integrals by isotropy of the material are discussed.

In § 6, we derive sufficient conditions on these integrals for the stress-deformation to be of the hereditary type and in §§ 7 and 8 we discuss the relation of the stress-deformation relations so derived to those of the theory of RIVLIN & ERICKSEN. Finally, in § 9 some of the equations derived in the present paper are transformed to a general curvilinear coordinate system convected with the material.

2. Stress Dependent on Displacement Gradients

Let every particle of a three-dimensional body be at rest, prior to time $\tau = 0$, relative to a fixed rectangular Cartesian coordinate system x_i . Let us suppose that after zero time the body is deformed continuously so that a typical particle P_0 of the body moves to P at time t and that at any time τ ($0 \leq \tau \leq t$) the coordinates of the particle in the system x_i are $x_i(\tau)$. We shall employ the notation

$$X_i = x_i(0) \quad \text{and} \quad x_i = x_i(t). \quad (2.1)$$

We consider that the functions $x_i(\tau)$ are specified as single-valued functions of X_i and τ , so that the deformation of the body is completely defined. We then have

$$x_i(\tau) = x_i(X_j, \tau) \quad \text{and} \quad x_i = x_i(X_j, t). \quad (2.2)$$

If this deformation is to be possible in a real material then $|\partial x_i(\tau)/\partial X_j| > 0$.

We denote the stress components in the coordinate system x_i at the particle P_0 and time τ by $\sigma_{ij}(\tau)$ and employ the notation

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t). \quad (2.3)$$

We consider that the components of stress σ_{ij} are polynomial functions of the $9(N+1)$ displacement gradients $\partial x_r(\tau_\alpha)/\partial X_s$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$) at $N+1$ distinct instants of time $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, \tau_0 (= t)$ between $\tau = 0$ and $\tau = t$. Thus,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \left[\frac{\partial x_r(\tau_\alpha)}{\partial X_s} \right], \quad (2.4)$$

where $\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$ and $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Now, let us suppose that we superpose on the deformation described by (2.2) an arbitrary rigid body rotation. Then, the coordinates $\bar{x}_i(\tau)$ of the particle P_0 at time τ in the coordinate system x_i will be given by

$$\bar{x}_i(\tau) = A_{ij}(\tau) x_j(\tau), \quad (2.5)$$

where $A_{ij}(\tau)$ is any continuous function of τ defining the rigid body rotation and is therefore subject to the conditions

$$A_{ir}(\tau) A_{jr}(\tau) = A_{,i}(\tau) A_{,j}(\tau) = \delta_{ij}, \quad |A_{ij}(\tau)| = 1. \quad (2.6)$$

The stress components $\bar{\sigma}_{ij}$ at time t in the coordinate system x_i due to the resultant of the deformations described by (2.2) and (2.5) are given, from (2.4), by

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} \left[\frac{\partial \bar{x}_r(\tau_\alpha)}{\partial X_s} \right]. \quad (2.7)$$

Let $x_i^*(\tau)$ be a moving rectangular Cartesian coordinate system which coincides with the fixed system x_i when $\tau=0$ and rotates with the rigid body motion described by (2.5). The stress components at time t in this system corresponding to the resultant of the deformations described by (2.2) and (2.5) are, of course, σ_{ij} . At time t , the coordinate systems $x_i^*(t)$ and x_i are related by

$$x_i = A_{ij} x_j^*(t), \quad A_{ij} = A_{ij}(t). \quad (2.8)$$

Hence,

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{ip} A_{jq} \sigma_{pq}. \quad (2.9)$$

Equations (2.4), (2.7) and (2.9) yield

$$\sigma_{ij} \left[\frac{\partial \bar{x}_r(\tau_\alpha)}{\partial X_s} \right] = A_{ip} A_{jq} \sigma_{pq} \left[\frac{\partial x_r(\tau_\alpha)}{\partial X_s} \right]. \quad (2.10)$$

The arguments in this relation may be considered to be the components of $3(N+1)$ vectors $\mathbf{g}_s(\tau_\alpha)$, the components of which are $\partial x_r(\tau_\alpha)/\partial X_s$ in the coordinate system $x_i(\tau_\alpha)$ and $\partial \bar{x}_r(\tau_\alpha)/\partial X_s$ in a coordinate system $\bar{x}_i(\tau_\alpha)$ related to $x_i(\tau_\alpha)$ by (2.5) with $\tau=\tau_\alpha$. Taking $A_{ij}(\tau)=\delta_{ij}$ in (2.10) for all τ except in a small interval about τ_1 , equation (2.10) becomes

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \left[\frac{\partial \bar{x}_r(\tau_1)}{\partial X_s}, \frac{\partial x_r(\tau_2)}{\partial X_s}, \dots \frac{\partial x_r(\tau_N)}{\partial X_s}, \frac{\partial x_r(\tau_0)}{\partial X_s} \right] \\ = \sigma_{ij} \left[\frac{\partial x_r(\tau_1)}{\partial X_s}, \frac{\partial x_r(\tau_2)}{\partial X_s}, \dots \frac{\partial x_r(\tau_N)}{\partial X_s}, \frac{\partial x_r(\tau_0)}{\partial X_s} \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

where $\bar{x}_r(\tau_1)$ and $x_r(\tau_1)$ are related by (2.5) with $\tau=\tau_1$, for all $A_{ij}(\tau_1)$ satisfying (2.6) with $\tau=\tau_1$. Hence σ_{ij} must be form-invariant under all proper orthogonal transformations of rectangular Cartesian coordinate axes $x_i(\tau_1)$, the axes $x_i(\tau_\alpha)$ ($\alpha=0, 2, \dots, N$) remaining unaltered. Similarly, it can be shown that σ_{ij} must be form-invariant under all proper orthogonal transformations of rectangular axes $x_i(\tau_\alpha)$ for each value of τ_α ($\alpha=1, 2, \dots, N$). The transformations for each value of α are independent of those for the remaining values of α . A complete table of typical basic invariants for the orthogonal group is known from classical invariant theory [see WEYL (1939) p. 53]. Every even* orthogonal polynomial invariant depending on three vectors $\mathbf{g}_r(\tau_\alpha)$ (for a given α) in three-dimensional vector space is expressible, in polynomial form, in terms of six scalar products $\mathbf{g}_r(\tau_\alpha) \cdot \mathbf{g}_s(\tau_\alpha)$. Every odd invariant is the sum of terms $[\mathbf{g}_r(\tau_\alpha) \mathbf{g}_s(\tau_\alpha) \mathbf{g}_t(\tau_\alpha)] f$, where f is an even invariant and $[\mathbf{g}_r(\tau_\alpha) \mathbf{g}_s(\tau_\alpha) \mathbf{g}_t(\tau_\alpha)]$ is the scalar triple product. The basic invariants are therefore

$$\mathbf{g}_r(\tau_\alpha) \cdot \mathbf{g}_s(\tau_\alpha) = g_{rs}(\tau_\alpha) = \frac{\partial x_m(\tau_\alpha)}{\partial X_r} \frac{\partial x_m(\tau_\alpha)}{\partial X_s}, \quad (2.12)$$

and

$$[\mathbf{g}_r(\tau_\alpha) \mathbf{g}_s(\tau_\alpha) \mathbf{g}_t(\tau_\alpha)] = e_{rst} \sqrt{g(\tau_\alpha)} = e_{rst} \left| \frac{\partial x_m(\tau_\alpha)}{\partial X_n} \right| \quad (2.13)$$

for $\alpha=1, 2, \dots, N$, where

$$g(\tau_\alpha) = |g_{mn}(\tau_\alpha)|, \quad (2.14)$$

* An even invariant is also invariant under improper orthogonal transformations but an odd invariant is not. The theorem applies to invariants which are polynomials in the components of the vectors.

and e_{rst} is the alternating Cartesian tensor. We thus have

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \left[g_{rs}(\tau_1), g_{rs}(\tau_2), \dots, g_{rs}(\tau_N), \sqrt{g(\tau_1)}, \sqrt{g(\tau_2)}, \dots, \sqrt{g(\tau_N)}, \frac{\partial x_r(\tau_0)}{\partial X_s} \right], \quad (2.15)$$

the polynomial dependence of σ_{ij} on the arguments in (2.15) being, in general, different from that in equations (2.4) to (2.11). From (2.15) and (2.10), we have

$$\sigma_{ij} \left[g_{rs}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}, \frac{\partial x_r(\tau_0)}{\partial X_s} \right] = A_{ip} A_{jq} \sigma_{pq} \left[g_{rs}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}, \frac{\partial x_r(\tau_0)}{\partial X_s} \right]. \quad (2.16)$$

Let \mathbf{a}, \mathbf{b} be two arbitrary vectors with components a_i, b_i in the coordinate system x_i . We form the quantity

$$F = a_i b_j \sigma_{ij}. \quad (2.17)$$

Then

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial b_j}. \quad (2.18)$$

It follows from (2.16) that F is a polynomial scalar invariant \star of the three vectors $\mathbf{g}_s(\tau_0)$ and \mathbf{a} and \mathbf{b} for proper orthogonal transformations. F can therefore be expressed as a polynomial in the quantities defined by (2.12) and (2.13) with $\alpha=0$ and the further invariants $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ and $I_r, J_r, P_{rs}, Q_{rs}, K$ and R_r defined by

$$\begin{aligned} I_r &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}_r(t) = a_i \frac{\partial x_i}{\partial X_r}, \quad J_r = \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_r(t) = b_j \frac{\partial x_j}{\partial X_r}, \\ P_{rs} &= [\mathbf{a} \mathbf{g}_r(t) \mathbf{g}_s(t)] = e_{ikl} a_i \frac{\partial x_k}{\partial X_r} \frac{\partial x_l}{\partial X_s}, \\ Q_{rs} &= [\mathbf{b} \mathbf{g}_r(t) \mathbf{g}_s(t)] = e_{jmn} b_j \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s}, \\ K &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i, \quad R_r = [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{g}_r(t)] = e_{ijk} a_i b_j \frac{\partial x_k}{\partial X_r}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Since F is homogeneous and bilinear in \mathbf{a} and \mathbf{b} , it must be expressible in the form

$$F = \mathcal{C}_{rs} I_r J_s + \mathcal{C} K + \mathcal{C}_{pqrs} P_{pq} Q_{rs} + \mathcal{C}_r R_r + \mathcal{F}_{prs} I_p Q_{rs} + \mathcal{G}_{prs} J_p P_{rs}, \quad (2.20)$$

where the \mathcal{C} 's, \mathcal{F} 's and \mathcal{G} 's are polynomials in the invariants defined by equations (2.12) and (2.13) with $\alpha=0, 1, 2, \dots, N$.

It follows from (2.18) and (2.20) that

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathcal{C}_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} + \mathcal{C} \delta_{ij} + \mathcal{C}_{pqrs} e_{ikl} \frac{\partial x_k}{\partial X_p} \frac{\partial x_l}{\partial X_q} e_{jmn} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} + \\ &\quad + \mathcal{C}_r e_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial X_r} + \mathcal{F}_{prs} e_{jmn} \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} + \\ &\quad + \mathcal{G}_{prs} e_{imn} \frac{\partial x_j}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Now, employing the relation

$$e_{ikl} e_{jmn} = \begin{vmatrix} \delta_{ij}, \delta_{im}, \delta_{in} \\ \delta_{kj}, \delta_{km}, \delta_{kn} \\ \delta_{lj}, \delta_{lm}, \delta_{ln} \end{vmatrix}, \quad (2.22)$$

\star I.e. F is a scalar polynomial which is form-invariant regarded as a function of $\mathbf{g}_s(\tau_0), \mathbf{a}, \mathbf{b}$.

we obtain, with the notation $g_{ij}(t) = g_{ij}$,

$$\begin{aligned} e_{ikl} e_{jmn} \frac{\partial x_k}{\partial X_p} \frac{\partial x_l}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} &= \delta_{ij} (g_{pr} g_{qs} - g_{ps} g_{qr}) + \\ &+ \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_q} g_{ps} - \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_p} g_{qs} + \\ &+ \frac{\partial x_i}{\partial X_s} \frac{\partial x_j}{\partial X_p} g_{qr} - \frac{\partial x_i}{\partial X_s} \frac{\partial x_j}{\partial X_q} g_{ps}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Again, using the relation (2.22), we obtain

$$\begin{aligned} e_{jmn} \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} \sqrt{g(t)} &= \\ e_{jmn} e_{uvw} \frac{\partial x_u}{\partial X_1} \frac{\partial x_v}{\partial X_2} \frac{\partial x_w}{\partial X_3} \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} &= \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} e_{klm} g_{lr} g_{ms}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Whence,

$$e_{jmn} \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} = \frac{\partial x_i}{\partial X_p} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \frac{1}{\sqrt{g(t)}} e_{klm} g_{lr} g_{ms}. \quad (2.25)$$

Introducing the relations (2.23) and (2.25) into (2.21) and bearing in mind that σ_{ij} is symmetric, we obtain

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} f_{rs} + \delta_{ij} f \right], \quad (2.26)$$

where f_{rs} and f are polynomials in $g_{rs}(\tau_\alpha)$ and $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$).

With the notation

$$f^* = f + \frac{1}{3} g_{rs} f_{rs}, \quad (2.27)$$

equation (2.26) may be re-written as

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \left[f^* \delta_{ij} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} \right]. \quad (2.28)$$

If the material considered is incompressible, $\sqrt{g(\tau_a)} = 1$ and σ_{ij} is undetermined to the extent of an arbitrary hydrostatic pressure p , so that equation (2.26) becomes

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} f_{rs} - p \delta_{ij}, \quad (2.29)$$

where f_{rs} is a polynomial in $g_{rs}(\tau_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$).

3. Isotropic Materials

If the material considered is isotropic when $t = 0$, equation (2.28) must be form-invariant for proper orthogonal transformations of the rectangular Cartesian coordinate system x_i . Let \bar{x}_i be a fixed rectangular Cartesian coordinate system related to x_i by

$$\bar{x}_i = A_{ij} x_j, \quad (3.1)$$

where A_{ij} are constants satisfying the orthogonality conditions

$$A_{ir} A_{jr} = A_{ri} A_{rj} = \delta_{ij}, \quad |A_{ij}| = 1. \quad (3.2)$$

If $\bar{x}_i(\tau)$ denotes the coordinates of $x_i(\tau)$ in the system \bar{x}_i and $\bar{X}_i = \bar{x}_i(0)$, we have, from (3.1),

$$\bar{x}_i(\tau) = A_{ij} x_j(\tau), \quad \bar{X}_i = A_{ij} X_j,$$

and

$$\bar{g}_{ij}(\tau) = \frac{\partial \bar{x}_r(\tau)}{\partial \bar{X}_i} \frac{\partial \bar{x}_r(\tau)}{\partial \bar{X}_j} = A_{ir} A_{js} g_{rs}(\tau). \quad (3.3)$$

Denoting the stress in the system \bar{x}_i by $\bar{\sigma}_{ij}$, the form-invariance of (2.28) requires that

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} = & \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(\tau)}} \left\{ f^* [\bar{g}_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{\bar{g}(\tau_\alpha)}] \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{X}_s} - \frac{1}{3} \bar{g}_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} [\bar{g}_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{\bar{g}(\tau_\alpha)}] \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

From (3.4) and (2.28) and the relation

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_{im} A_{jn} \sigma_{mn}, \quad (3.5)$$

it follows that

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{X}_s} - \frac{1}{3} \bar{g}_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} [\bar{g}_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{\bar{g}(\tau_\alpha)}] \\ & = A_{im} A_{jn} \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{mn} \right) f_{rs} [g_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}], \end{aligned}$$

and

$$f^* [\bar{g}_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{\bar{g}(\tau_\alpha)}] = f^* [g_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}], \quad (3.6)$$

where $g_{pq}(\tau)$ and $\bar{g}_{pq}(\tau)$ are related by (3.3) so that

$$\bar{g}(\tau) = g(\tau), \quad (3.7)$$

and the equations are valid for all A_{ij} satisfying (3.2).

Employing the notation

$$\mathbf{g}(\tau) = \|g_{ij}(\tau)\|, \quad \bar{\mathbf{g}}(\tau) = \|\bar{g}_{ij}(\tau)\| \quad \text{and} \quad \mathbf{A} = \|A_{ij}\|, \quad (3.8)$$

the last of the relations (3.3) can be re-written as

$$\bar{\mathbf{g}}(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{g}(\tau) \mathbf{A}', \quad (3.9)$$

where \mathbf{A}' denotes the transpose of \mathbf{A} .

With (3.7), the second of equations (3.6) states that f^* is a polynomial \star in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ and a polynomial scalar invariant under proper orthogonal transformations of the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$. It may therefore be expressed as a polynomial in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$) and traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$).

Let b_{ij} and \bar{b}_{ij} be the components of an arbitrary (not necessarily symmetric) tensor in the coordinate systems x_i and \bar{x}_i respectively. It is readily seen that B_{rs} and \bar{B}_{rs} , defined by

$$B_{rs} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) b_{ij}$$

\star We note that $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ is a scalar invariant of $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ under proper orthogonal transformations but is not a polynomial scalar invariant.

and

$$\bar{B}_{rs} = \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{X}_s} - \frac{1}{3} \bar{g}_{rs} \delta_{ij} \right) \bar{b}_{ij}, \quad (3.10)$$

are the components of a Cartesian tensor in the coordinate systems x_i and \bar{x}_i respectively. We obtain from the first of equations (3.6) and equation (3.7), the relation

$$\bar{B}_{rs} f_{rs} [\bar{g}_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}] = B_{rs} f_{rs} [g_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}]. \quad (3.11)$$

Denoting the expression on the right-hand side of (3.11) by F and with the notation $\mathbf{B} = \|B_{ij}\|$, equation (3.11) states that F is a polynomial in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ and a polynomial scalar invariant of the matrices \mathbf{B} and $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$. It can therefore be expressed as a polynomial in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$) and traces of products formed from the matrices \mathbf{B} and $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$, ($\alpha = 0, 1, \dots, N$). Since F is linear in the elements of \mathbf{B} , f_{rs} is given by

$$f_{rs} = \partial F / \partial B_{rs}. \quad (3.12)$$

We see that f_{rs} are the components of a symmetric matrix polynomial in the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ in which the coefficients are polynomials in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$) and traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$). It is immediately apparent that $g_{rs} f_{rs}$ is a scalar polynomial in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ and traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$. Hence, from (2.27), f is a scalar polynomial in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ and traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$.

We thus obtain the result that for the isotropic material

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \left[f \delta_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} f_{rs} \right], \quad (3.13)$$

where f_{rs} are the elements of a symmetric matrix polynomial in the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, \dots, N$) and f and the coefficients in f_{rs} are scalar polynomials in $\sqrt{g(\tau_\alpha)}$ and traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$.

Employing the notation

$$\sigma = \|\sigma_{ij}\|, \quad \mathbf{c} = \|\partial x_i / \partial X_r\| \quad \text{and} \quad \mathbf{f} = \|f_{rs}\|, \quad (3.14)$$

we may express the result (3.13) in matrix notation by

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} [f \mathbf{I} + \mathbf{c} \mathbf{f} \mathbf{c}'], \quad (3.15)$$

where \mathbf{I} denotes the unit matrix and \mathbf{c}' denotes the transpose of \mathbf{c} .

If the material considered is incompressible, it is readily seen that equation (3.13) becomes

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} f_{rs}, \quad (3.16)$$

where p is an arbitrary hydrostatic pressure and f_{rs} are the elements of a symmetric matrix polynomial in the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, N$), the coefficients in which are scalar polynomials in traces of products formed from the matrices $\mathbf{g}(\tau_\alpha)$.

4. Tensor Functionals

We begin by taking an expression for the stress σ_{ij} at time t in the form (2.28), viz.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \left\{ f^* [g_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}] \delta_{ij} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} [g_{pq}(\tau_\alpha), \sqrt{g(\tau_\alpha)}] \right\}, \quad (4.1)$$

where τ_α denotes $N+1$ instants of time $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, \tau_0 (=t)$ and f and f_{rs} are polynomials in the arguments. Following ideas expounded by VOLTERRA (1930), we pass from tensor functions of the form (4.1) to tensor functionals and write

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \left\{ f^* \left[\begin{smallmatrix} g_{pq}(\tau) & t \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \delta_{ij} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} \left[\begin{smallmatrix} g_{pq}(\tau) & t \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \right\}. \quad (4.2)$$

This equation means that f^*, f_{rs} and hence σ_{ij} depend on all the values taken by $g_{pq}(\tau)$ and $\sqrt{g(\tau)}$ when τ varies in the interval $0 \leq \tau \leq t$.

Bearing in mind that $\sqrt{g(\tau)}$ is a single-valued function of the $g_{pq}(\tau)$, we see that there is no loss of generality in taking f^* and f_{rs} in (4.2) as functionals of the $g_{pq}(\tau)$ only and omitting the factor $1/\sqrt{g(t)}$.

We thus obtain

$$\sigma_{ij} = f^* \left[\begin{smallmatrix} g_{pq}(\tau) & t \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \delta_{ij} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) f_{rs} \left[\begin{smallmatrix} g_{pq}(\tau) & t \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right], \quad (4.3)$$

f^* and f_{rs} denoting new functionals which are different, in general, from those which these symbols denote in (4.2).

In the following discussion we shall assume that $g_{pq}(\tau)$ belongs to the aggregate (C) of functions which are continuous in $0 \leq \tau \leq t$ and that the aggregate is compact. Also, we assume that f^* and f_{rs} in (4.3) are continuous functionals on (C). We denote the Fourier half-range cosine coefficients of $g_{pq}(\tau)$ by $G_{pq}^{(\alpha)}$. Then,

$$G_{pq}^{(\alpha)} = \frac{2}{t} \int_0^t g_{pq}(\tau) \cos \frac{\alpha \pi \tau}{t} d\tau \quad (\alpha > 0),$$

and

$$G_{pq}^{(0)} = \frac{1}{t} \int_0^t g_{pq}(\tau) d\tau. \quad (4.4)$$

Following an argument similar to that employed by FRÉCHET (1910), we may approximate the continuous functional f^* by a polynomial $P^{(\alpha)}(G_{pq}^{(0)}, G_{pq}^{(1)}, \dots, G_{pq}^{(\alpha)})$ which tends uniformly to f^* as $\alpha \rightarrow \infty$. Now, let us consider a typical term $G_{p_1 q_1}^{(\alpha_1)} G_{p_2 q_2}^{(\alpha_2)} \dots G_{p_R q_R}^{(\alpha_R)}$ in the polynomial $P^{(\alpha)}$, where some or all of $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ may be repeated values of the same integer. From (4.4), we obtain

$$G_{p_1 q_1}^{(\alpha_1)} G_{p_2 q_2}^{(\alpha_2)} \dots G_{p_R q_R}^{(\alpha_R)} = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_R \cos \frac{\alpha_1 \pi \tau_1}{t} \cos \frac{\alpha_2 \pi \tau_2}{t} \dots \cos \frac{\alpha_R \pi \tau_R}{t} \times \\ \times g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots g_{p_R q_R}(\tau_R) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R, \quad (4.5)$$

where $C_R = 2^{R-p} t^{-R}$, p denoting the number of the indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ which are zero.

It follows that $\int_0^t [g_{p,q}(\tau)]$ may be expressed with any desired degree of approximation in the form

$$\begin{aligned} \int_0^t [g_{p,q}(\tau)] &= K(t) + \int_0^t K_{p,q}(t, \tau) g_{p,q}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_{p_1 q_1 p_2 q_2}(t, \tau_1, \tau_2) g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ &+ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t K_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_R q_R}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_R) \times \\ &\times g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots g_{p_R q_R}(\tau_R) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Similarly, it is seen that $\int_0^t [g_{p,q}(\tau)]$ may be expressed with any desired degree of approximation in the form

$$\begin{aligned} \int_0^t [g_{p,q}(\tau)] &= L_{rs}(t) + \int_0^t L_{rs p,q}(t, \tau) g_{p,q}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^t L_{rs p_1 q_1 p_2 q_2}(t, \tau_1, \tau_2) g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ &+ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t L_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_R q_R}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_R) \times \\ &\times g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots g_{p_R q_R}(\tau_R) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R. \end{aligned} \quad (4.7)$$

In (4.6) and (4.7) the K 's and L 's are continuous functions of their arguments.

5. Isotropic Tensor Functionals

If the material is isotropic, the expression (4.3) for the stress must be form-invariant under proper orthogonal transformations of the reference system. We have already remarked that the functionals $\int_0^t [g_{p,q}(\tau)]$ and $\int_0^t [g_{p,q}(\tau)]$ may be expressed with any desired degree of accuracy as polynomials in the quantities $G_{p,q}^{(0)}, G_{p,q}^{(1)}, \dots, G_{p,q}^{(\alpha)}$. Let us write

$$\int_0^t [g_{p,q}(\tau)] = P^{(\alpha)}(G_{p,q}^{(\mu)})$$

and

$$\int_0^t [g_{p,q}(\tau)] = P_{rs}^{(\alpha)}(G_{p,q}^{(\mu)}), \quad (5.1)$$

where the index μ takes the values $0, 1, 2, \dots, \alpha$ and $P_{rs}^{(\alpha)}$ is symmetric. Then, from (4.3), we have

$$\sigma_{ij} = P^{(\alpha)}(G_{p,q}^{(\mu)}) \delta_{ij} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} \frac{\partial x_j}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{ij} \right) P_{rs}^{(\alpha)}(G_{p,q}^{(\mu)}). \quad (5.2)$$

We now consider the conditions which must be satisfied by $P^{(\alpha)}$ and $P_{rs}^{(\alpha)}$ for (5.2) to be form-invariant under a proper orthogonal transformation of the

reference system. The method employed is similar to that used in § 3, in which the case of stress dependent on the displacement gradients at a finite number of instants of time is considered. \bar{x}_i is a fixed rectangular Cartesian coordinate system related to x_i by equation (3.1) and $\bar{g}_{ij}(\tau)$ is defined by equation (3.3). Analogously with (4.4), we write

$$\bar{G}_{pq}^{(\alpha)} = \frac{2}{t} \int_0^t \bar{g}_{pq}(\tau) \cos \frac{\alpha \pi \tau}{t} d\tau \quad (\alpha > 0) \quad (5.3)$$

and

$$\bar{G}_{pq}^{(0)} = \frac{1}{t} \int_0^t \bar{g}_{pq}(\tau) d\tau,$$

and note that

$$\bar{G}_{ij}^{(\alpha)} = A_{ip} A_{jq} G_{pq}^{(\alpha)}. \quad (5.4)$$

The form-invariance of equation (5.2) requires that

$$\bar{\sigma}_{ij} = P^{(\alpha)}(\bar{G}_{pq}^{(\mu)}) \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{X}_s} - \frac{1}{3} \bar{g}_{rs} \delta_{ij} \right) P_{rs}^{(\alpha)}(\bar{G}_{pq}^{(\mu)}). \quad (5.5)$$

From equations (5.2), (5.5), (3.3) and (3.5), we obtain

$$\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{X}_r} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \bar{X}_s} - \frac{1}{3} \bar{g}_{rs} \delta_{ij} \right) P_{rs}^{(\alpha)}(\bar{G}_{pq}^{(\mu)}) = A_{im} A_{jn} \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_r} \frac{\partial x_n}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g_{rs} \delta_{mn} \right) P_{rs}^{(\alpha)}(G_{pq}^{(\mu)})$$

and

$$P^{(\alpha)}(\bar{G}_{pq}^{(\mu)}) = P^{(\alpha)}(G_{pq}^{(\mu)}). \quad (5.6)$$

The second of these equations implies that $P^{(\alpha)}$ is a polynomial scalar invariant under proper orthogonal transformations of the matrices $\mathbf{G}^{(\mu)}$ ($= G_{pq}^{(\mu)}$), $\mu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$. It may therefore be expressed as a polynomial in traces of products formed from these matrices. Again, we can employ the first of equations (5.6) in a manner similar to that used in § 3 to show that $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ ($= \|P_{rs}^{(\alpha)}\|$) is a symmetric isotropic matrix polynomial in the matrices $\mathbf{G}^{(\mu)}$.

It is apparent that if, from the terms on the left-hand side of equation (4.5), we form a product of traces of products of the matrices $\mathbf{G}^{(\alpha_1)}, \mathbf{G}^{(\alpha_2)}, \dots, \mathbf{G}^{(\alpha_R)}$, then, in the integrand on the right-hand side of (4.5), we must replace

$$g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots g_{p_R q_R}(\tau_R)$$

by a product of traces of products of the matrices $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_R)$. For example, we have from (4.5)

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} \mathbf{G}^{(\alpha_1)} \mathbf{G}^{(\alpha_2)} \operatorname{tr} \mathbf{G}^{(\alpha_3)} \mathbf{G}^{(\alpha_4)} \dots \mathbf{G}^{(\alpha_R)} \\ &= G_{p_1 p_2}^{(\alpha_1)} G_{p_2 p_1}^{(\alpha_2)} G_{p_3 p_4}^{(\alpha_3)} G_{p_4 p_3}^{(\alpha_4)} \dots G_{p_R p_1}^{(\alpha_R)} \\ &= \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_R \cos \frac{\alpha_1 \pi \tau_1}{t} \cos \frac{\alpha_2 \pi \tau_2}{t} \dots \cos \frac{\alpha_R \pi \tau_R}{t} \times \\ & \quad \times g_{p_1 p_2}(\tau_1) g_{p_2 p_1}(\tau_2) g_{p_3 p_4}(\tau_3) g_{p_4 p_3}(\tau_4) \dots g_{p_R p_1}(\tau_R) \\ &= \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_R \cos \frac{\alpha_1 \pi \tau_1}{t} \cos \frac{\alpha_2 \pi \tau_2}{t} \dots \cos \frac{\alpha_R \pi \tau_R}{t} \times \\ & \quad \times \operatorname{tr} \mathbf{g}(\tau_1) \mathbf{g}(\tau_2) \operatorname{tr} \mathbf{g}(\tau_3) \mathbf{g}(\tau_4) \dots \mathbf{g}(\tau_R) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R. \end{aligned} \quad (5.7)$$

In a similar way, we see that if, from the terms on the left-hand side of equation (4.5), we form a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{G}^{(\alpha_1)}, \mathbf{G}^{(\alpha_2)}, \dots, \mathbf{G}^{(\alpha_R)}$, then in the integrand on the right-hand side of (4.5) we must replace $g_{p_1 q_1}(\tau_1) g_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots g_{p_R q_R}(\tau_R)$ by a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_R)$ which is multilinear in these matrices. For example, from (4.5),

$$\begin{aligned}
& \operatorname{tr} (\mathbf{G}^{(\alpha_1)} \mathbf{G}^{(\alpha_2)}) [\mathbf{G}^{(\alpha_3)} \mathbf{G}^{(\alpha_4)} \dots \mathbf{G}^{(\alpha_R)} + \mathbf{G}^{(\alpha_R)} \dots \mathbf{G}^{(\alpha_4)} \mathbf{G}^{(\alpha_3)}] \\
&= G_{p_1 p_2}^{(\alpha_1)} G_{p_2 p_1}^{(\alpha_2)} \| G_{p_3 p_4}^{(\alpha_3)} G_{p_4 p_5}^{(\alpha_4)} \dots G_{p_R q}^{(\alpha_R)} + G_{p_3 p_4}^{(\alpha_R)} \dots G_{p_{R-1} p_R}^{(\alpha_4)} G_{p_R q}^{(\alpha_3)} \| \\
&= \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_R \cos \frac{\alpha_1 \pi \tau_1}{t} \cos \frac{\alpha_2 \pi \tau_2}{t} \dots \cos \frac{\alpha_R \pi \tau_R}{t} g_{p_1 p_2}(\tau_1) g_{p_2 p_1}(\tau_2) \times \\
&\quad \times \| g_{p_3 p_4}(\tau_3) g_{p_4 p_5}(\tau_4) \dots g_{p_R q}(\tau_R) + g_{p_3 p_4}(\tau_R) \dots g_{p_{R-1} p_R}(\tau_4) g_{p_R q}(\tau_3) \| \times \\
&\quad \times d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R \\
&= \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_R \cos \frac{\alpha_1 \pi \tau_1}{t} \cos \frac{\alpha_2 \pi \tau_2}{t} \dots \cos \frac{\alpha_R \pi \tau_R}{t} \times [\operatorname{tr} \mathbf{g}(\tau_1) \mathbf{g}(\tau_2)] \times \\
&\quad \times [\mathbf{g}(\tau_3) \mathbf{g}(\tau_4) \dots \mathbf{g}(\tau_R) + \mathbf{g}(\tau_R) \dots \mathbf{g}(\tau_4) \mathbf{g}(\tau_3)] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

It follows from the above considerations that $P^{(\alpha)}(G_{p q}^{(\mu)})$ may be expressed in the form

$$\begin{aligned}
P^{(\alpha)}(G_{p q}^{(\mu)}) &= \varphi^{(0)}(t) + \int_0^t \varphi^{(1)}\{t, \tau, \mathbf{g}(\tau)\} d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_0^t \varphi^{(2)}\{t, \tau_1, \tau_2, \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\
&+ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \varphi^{(R)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_R, \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_R)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

where $\varphi^{(k)}$ is a homogeneous polynomial scalar invariant of the matrices $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)$ linear in each of them, and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. In a similar manner it follows that

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{(\alpha)}(G_{p q}^{(\mu)}) &= \boldsymbol{\Phi}^{(0)}(t) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}^{(1)}\{t, \tau, \mathbf{g}(\tau)\} d\tau + \\
&+ \int_0^t \int_0^t \boldsymbol{\Phi}^{(2)}\{t, \tau_1, \tau_2, \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\
&+ \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \boldsymbol{\Phi}^{(R)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_R, \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_R)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_R, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{\Phi}^{(k)}$ is a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)$, of degree k in the elements of the matrices and linear in each of them, and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.

6. Hereditary Tensor Functionals

Returning to equation (4.3) in which the functionals f^* and f_{rs} are given by (4.6) and (4.7), we see that if we employ the notation

$$e_{p q}(\tau) = g_{p q}(\tau) - \delta_{p q}, \quad (6.1)$$

the functionals f^* and f_{rs} may now be expressed by

$$f^*[g_{pq}^t(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$f_{rs}[g_{pq}^t(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t N_{r s p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (6.2)$$

where the M 's and N 's are continuous functions of their arguments.

Let us now consider two deformations A and B of the body in which a point at X_i in the undeformed state moves to $x_i(\tau)$ and $x'_i(\tau)$ respectively at time τ , where

$$x'_i(\tau + h) = x_i(\tau), \quad (6.3)$$

h being a positive constant. Let $g'_{pq}(\tau)$ be the value of $g_{pq}(\tau)$ and $e'_{pq}(\tau)$ the value of $e_{pq}(\tau)$ for the deformation B . Then, from (6.3)

$$g'_{pq}(\tau + h) = g_{pq}(\tau) \quad \text{and} \quad e'_{pq}(\tau + h) = e_{pq}(\tau). \quad (6.4)$$

The stress $\sigma_{ij}(t)$ at time t corresponding to the deformation A is given by (4.3) in which f^* and f_{rs} are given by (6.2). The stress $\sigma'_{ij}(t+h)$ at time $t+h$ corresponding to the deformation B is given by

$$\sigma'_{ij}(t+h) = f^*[g'_{pq}^t(\tau)] \delta_{ij} + \\ + \left[\frac{\partial x'_i(t+h)}{\partial X_r} \frac{\partial x'_j(t+h)}{\partial X_s} - \frac{1}{3} g'_{rs}(t+h) \delta_{ij} \right] f_{rs}[g'_{pq}^t(\tau)], \quad (6.5)$$

with

$$f^*[g'_{pq}^t(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^{t+h} \int_0^{t+h} \cdots \int_0^{t+h} M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ \times e'_{p_1 q_1}(\tau_1) e'_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e'_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$f_{rs}[g'_{pq}^t(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^{t+h} \int_0^{t+h} \cdots \int_0^{t+h} N_{r s p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ \times e'_{p_1 q_1}(\tau_1) e'_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e'_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (6.6)$$

Now, since in the deformation B , the material is undeformed prior to time h , we have $e'_{p_1 q_1}(\tau) = 0$ for $\tau < h$, so that

$$f^*[g'_{pq}^t(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_h^{t+h} \int_h^{t+h} \cdots \int_h^{t+h} M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ \times e'_{p_1 q_1}(\tau_1) e'_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e'_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (6.7)$$

Employing the second of the relations (6.4) and the notation $\bar{\tau} = \tau - h$, we obtain

$$\begin{aligned} f^*[g'_{pq}(\tau)] &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \bar{\tau}_1+h, \bar{\tau}_2+h, \dots, \bar{\tau}_k+h) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\bar{\tau}_1) e_{p_2 q_2}(\bar{\tau}_2) \cdots e_{p_k q_k}(\bar{\tau}_k) d\bar{\tau}_1 d\bar{\tau}_2 \cdots d\bar{\tau}_k \\ &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \tau_1+h, \tau_2+h, \dots, \tau_k+h) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \cdots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Similarly, we can obtain

$$\begin{aligned} f_s[g'_{pq}(\tau)] &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t+h, \tau_1+h, \tau_2+h, \dots, \tau_k+h) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \cdots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Introducing the relations (6.3), (6.4), (6.8) and (6.9) into (6.5), we see that if the M 's and N 's have the forms

$$M_{p_1 q_1 \dots p_k q_k}(t, \tau_1, \dots, \tau_k) = M_{p_1 q_1 \dots p_k q_k}(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k)$$

and

$$N_{rs p_1 q_1 \dots p_k q_k}(t, \tau_1, \dots, \tau_k) = N_{rs p_1 q_1 \dots p_k q_k}(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k), \quad (6.10)$$

then

$$\sigma'_{ij}(t+h) = \sigma_{ij}(t). \quad (6.11)$$

If the relations (6.10) are satisfied then the functionals f and f_s are said to be hereditary functionals.

The stress σ_{ij} at time t corresponding to the deformation A is then given by equation (4.3) in which

$$\begin{aligned} f^*[g_{pq}(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \cdots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_s[g_{pq}(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \cdots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \end{aligned} \quad (6.12)$$

It is seen from equations (5.1), (5.2), (5.9) and (5.10) that if the material considered is isotropic in its undeformed state, the stress σ_{ij} is given by (4.3) in which

$$\begin{aligned} f^*[g_{pq}(\tau)] &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \varphi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \\ &\quad \quad \quad \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \end{aligned}$$

and

$$\|f_{rs}[g_{pq}(\tau)]\| = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \Phi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \\ \mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (6.13)$$

where $\varphi^{(k)}$ is a homogeneous polynomial scalar invariant of the matrices $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)$, linear in each of them, and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ and $\Phi^{(k)}$ is a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)$, linear in each of these. The coefficients of the matrix products in $\Phi^{(k)}$ are polynomials in the invariants of the matrices $\mathbf{g}(\tau_1), \mathbf{g}(\tau_2), \dots, \mathbf{g}(\tau_k)$ and scalar functions of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.

With the notation (6.1) it is seen that (6.13) may be re-written as

$$f^*[g_{pq}(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \psi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \\ \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$\|f_{rs}[g_{pq}(\tau)]\| = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t \Psi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \\ \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (6.14)$$

where $\mathbf{e}(\tau) = \|e_{pq}(\tau)\|$, $\psi^{(k)}$ is a homogeneous polynomial scalar invariant of the matrices $\mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)$, linear in each of them, and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ and $\Psi^{(k)}$ is a symmetric matrix polynomial in $\mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)$, linear in each of these. The coefficients of the matrix products in $\Psi^{(k)}$ are polynomials in the invariants of the matrices $\mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)$ and scalar functions of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.

It is easily shown, in a manner similar to that employed in the more general case, when the material is not necessarily isotropic, that if the dependence of $\psi^{(k)}$ and $\Psi^{(k)}$ on $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ is of the form

$$\psi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\} \\ = \psi^{(k)}\{t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k, \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\}$$

and

$$\Psi^{(k)}\{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\} \\ = \Psi^{(k)}\{t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k, \mathbf{e}(\tau_1), \mathbf{e}(\tau_2), \dots, \mathbf{e}(\tau_k)\} \quad (6.15)$$

then for two deformations related by (6.3), the stresses are related by (6.11).

7. Alternative Forms of Hereditary Functionals

We consider the stress σ_{ij} at time t to be given by equation (4.3) in which f^* and f_{rs} are functionals of the hereditary type given by (6.12). We assume that the kernels $M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}$ and $N_{r_s p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}$ in (6.12) become zero if any of the arguments $t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k$ is greater than some fixed time T . Physically, this means that the memory of the material considered is of limited duration T ; i.e. the deformation at times earlier than T before the instant at which the stress is measured has no effect on the stress. We can then replace

the expressions (6.12) by

$$\begin{aligned} f^*[g_{pq}^t(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \cdots \int_{t-T}^t M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \\ &= \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(t-\tau_1) e_{p_2 q_2}(t-\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f_{rs}[g_{pq}^t(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \cdots \int_{t-T}^t N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(\tau_1) e_{p_2 q_2}(\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \\ &= \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times e_{p_1 q_1}(t-\tau_1) e_{p_2 q_2}(t-\tau_2) \dots e_{p_k q_k}(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (7.1) \end{aligned}$$

We now assume that $e_{pq}(\tau)$ has continuous derivatives up to order $\nu+1$ in the range $t-T \leq \tau \leq t$, so that $e_{pq}(t-\tau)$ has the Taylor expansion

$$e_{pq}(t-\tau) = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\alpha} \tau^{\alpha}}{\alpha!} \frac{D^{\alpha} e_{pq}}{D t^{\alpha}} + S_{pq}(t, \tau), \quad (7.2)$$

where

$$S_{pq}(t, \tau) = \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \int_0^{\tau} (u-\tau)^{\nu} \frac{D^{\nu+1} e_{pq}(t-u)}{D u^{\nu+1}} du. \quad (7.3)$$

Substituting from (7.2) in the expression (7.1) for f^* , we obtain

$$\begin{aligned} f^*[g_{pq}^t(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times \prod_{\beta=1}^k \left\{ \sum_{\alpha_{\beta}=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\alpha_{\beta}} \tau_{\beta}^{\alpha_{\beta}}}{\alpha_{\beta}!} \frac{D^{\alpha_{\beta}} e_{p_{\beta} q_{\beta}}}{D t^{\alpha_{\beta}}} + S_{p_{\beta} q_{\beta}}(t, \tau_{\beta}) \right\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (7.4) \end{aligned}$$

If $e_{pq}(\tau)$ is a polynomial of degree ν in the range $t-T \leq \tau \leq t$, then $S_{p_{\beta} q_{\beta}}(t, \tau_{\beta})$ vanishes identically and (7.4) becomes

$$\begin{aligned} f^*[g_{pq}^t(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha} \frac{(-\tau_1)^{\alpha_1} (-\tau_2)^{\alpha_2} \dots (-\tau_k)^{\alpha_k}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \frac{D^{\alpha_1} e_{p_1 q_1}}{D t^{\alpha_1}} \frac{D^{\alpha_2} e_{p_2 q_2}}{D t^{\alpha_2}} \dots \frac{D^{\alpha_k} e_{p_k q_k}}{D t^{\alpha_k}} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (7.5) \end{aligned}$$

where, in the summation \sum_{α} under the integral sign, the α 's take the values 0 to ν . In a similar manner it can be shown that

$$\begin{aligned} f_{rs}[g_{pq}^t(\tau)] &= \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \cdots \int_0^T N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\quad \times \sum_{\alpha} \frac{(-\tau_1)^{\alpha_1} (-\tau_2)^{\alpha_2} \dots (-\tau_k)^{\alpha_k}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \frac{D^{\alpha_1} e_{p_1 q_1}}{D t^{\alpha_1}} \frac{D^{\alpha_2} e_{p_2 q_2}}{D t^{\alpha_2}} \dots \frac{D^{\alpha_k} e_{p_k q_k}}{D t^{\alpha_k}} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (7.6) \end{aligned}$$

where, again, in the summation Σ_α under the integral sign, the α 's take the values 0 to v . In (7.5) and (7.6) we may carry out the integrations with respect to $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ and we then obtain

$$f^*[g_{pq}(\tau)] = \sum_0^R \Sigma_\alpha M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}^{*(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)} \frac{D^{\alpha_1} e_{p_1 q_1}}{D t^{\alpha_1}} \frac{D^{\alpha_2} e_{p_2 q_2}}{D t^{\alpha_2}} \dots \frac{D^{\alpha_k} e_{p_k q_k}}{D t^{\alpha_k}}$$

and

$$f_{rs}[g_{pq}(\tau)] = \sum_0^R \Sigma_\alpha N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}^{*(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)} \frac{D^{\alpha_1} e_{p_1 q_1}}{D t^{\alpha_1}} \frac{D^{\alpha_2} e_{p_2 q_2}}{D t^{\alpha_2}} \dots \frac{D^{\alpha_k} e_{p_k q_k}}{D t^{\alpha_k}}, \quad (7.7)$$

where

$$M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}^{*(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)} = \frac{(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_k^{\alpha_k} \times \\ \times M_{p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}^{*(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)} = \frac{(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_k^{\alpha_k} \times \\ \times N_{rs p_1 q_1 p_2 q_2 \dots p_k q_k}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (7.8)$$

We note that f^* and f_{rs} , given by (7.7), and hence σ_{ij} given by (4.3), are independent of t and involve only the M^* 's and N^* 's, which are parameters defining the relevant physical properties of the material, and kinematically defined quantities measured at time t .

In the case when $e_{pq}(\tau)$ is not a polynomial function of τ , we assume that it has continuous derivatives up to order $v+1$ in the range $t-T \leq \tau \leq t$ and that

$$\left| \frac{D^\alpha e_{ij}(t)}{D t^\alpha} \right| \leq P_{ij}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 0, 1, \dots, v)$$

and

$$\left| \frac{D^{v+1} e_{ij}(\tau)}{D \tau^{v+1}} \right| \leq \varepsilon Q_{ij} \quad (t-T \leq \tau \leq t), \quad (7.9)$$

where $P_{ij}^{(\alpha)}$ and Q_{ij} may depend on X_i but not on t or τ and where ε is a sufficiently small positive constant. It follows from (7.3) and (7.9) that

$$S_{pq}(t, \tau) \leq \frac{\varepsilon Q_{pq} \tau^{v+1}}{(v+1)!}. \quad (7.10)$$

If we expand the integrand in (7.4), we see that f^* is given by the expression on the right-hand side of the first of equations (7.7), plus terms of the form $\varepsilon^\alpha B^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 1$), where $|B^{(\alpha)}| < C^{(\alpha)}$, a quantity independent of t . Similarly, it can be shown that f_{rs} is given by the expression on the right-hand side of the second of equations (7.7), plus terms of the form $\varepsilon^\alpha B_{rs}^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 1$), where $|B_{rs}^{(\alpha)}| \leq C_{rs}^{(\alpha)}$, a quantity independent of t . It follows that if $e_{pq}(\tau)$ satisfies the conditions (7.9), σ_{ij} may be expressed in the form (4.3), while f^* and f_{rs} are expressible approximately in the forms given by equations (7.7) with the neglect only of terms of order ε .

8. Alternative Forms for Isotropic Hereditary Functionals

It has been seen in § 6 that, if the material considered is isotropic in its undeformed state, f^* and f_{rs} are given by equations (6.14), in which $\psi^{(k)}$ and $\Psi^{(k)}$ have the forms (6.15). We assume, as in the more general case discussed in § 7, that $\psi^{(k)}$ and $\Psi^{(k)}$ become zero if any of the arguments $t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k$ is greater than some fixed time T . It is easily seen, as in the previous case, that

$$f^*[g_{pq}(\tau)] = \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \psi^{(k)}\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}(t - \tau_1), \mathbf{e}(t - \tau_2), \dots, \mathbf{e}(t - \tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$f_{rs}[g_{pq}(\tau)] = \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \Psi^{(k)}\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}(t - \tau_1), \mathbf{e}(t - \tau_2), \dots, \mathbf{e}(t - \tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k. \quad (8.1)$$

Employing (7.2) and assuming that $e_{pq}(\tau)$ is a polynomial of degree v in the range $t - T \leq \tau \leq t$, so that $S_{pq}(t, \tau) = 0$, it is readily seen that equations (8.1) may be re-written, with the notation $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t)$, $D\mathbf{e}/Dt = D\mathbf{e}(t)/Dt$, etc.,

$$f^*[g_{pq}(\tau)] = \sum_{k=1}^R \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \psi^{*(k)}\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

and

$$f_{rs}[g_{pq}(\tau)] = \sum_{k=0}^R \int_0^T \int_0^T \dots \int_0^T \Psi^{*(k)} \times \\ \times \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (8.2)$$

where $\psi^{*(k)}$ is a homogeneous polynomial scalar invariant of the matrices \mathbf{e} , $D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$ and a function of $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ and $\Psi^{*(k)}$ is a symmetric isotropic matrix polynomial in these matrices, homogeneous in their elements. The coefficients of the matrix products in $\Psi^{*(k)}$ are polynomial scalar invariants in the matrices $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$ with coefficients which are functions in $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. Carrying out the integrations with respect to $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ in (8.2), we see that f^* may be expressed as a polynomial scalar invariant of the matrices $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$ and $\|f_{rs}\|$ may be expressed as a symmetric isotropic matrix polynomial in these matrices. We note that neither f^* nor $\|f_{rs}\|$ depend on t , except through the matrices $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$.

It has been shown by RIVLIN & ERICKSEN (1955) that if we assume that the stress components σ_{ij} at time t in an isotropic material are expressible as polynomials in the displacement gradients $\partial x_p / \partial X_q$, velocity gradients $\partial v_p^{(1)} / \partial X_q$, acceleration gradients $\partial v_p^{(2)} / \partial X_q, \dots, (v-1)^{\text{th}}$ acceleration gradients $\partial v_p^{(v)} / \partial X_q$, where $v_p^{(1)}, v_p^{(2)}, \dots, v_p^{(v)}$ denote the velocity, acceleration, $\dots, (v-1)^{\text{th}}$ acceleration at time t , then $\sigma (= \|\sigma_{ij}\|)$ must be expressible as a symmetric isotropic matrix polynomial in the matrices $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$, defined by

$$\mathbf{C} = \|C_{pq}\| = \left\| \frac{\partial x_p}{\partial X_r} \frac{\partial x_q}{\partial X_r} \right\|, \\ \mathbf{A}_1 = \|A_{pq}^{(1)}\| = \left\| \frac{\partial v_p^{(1)}}{\partial x_q} + \frac{\partial v_q^{(1)}}{\partial x_p} \right\|$$

and

$$\mathbf{A}_{\alpha+1} = \|A_{pq}^{(\alpha+1)}\| = \left\| \frac{DA_{pq}^{(\alpha)}}{Dt} + A_{pm}^{(\alpha)} \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_q} + A_{qm}^{(\alpha)} \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_p} \right\|. \quad (8.3)$$

Now, we have

$$\begin{aligned} \frac{De_{pq}}{Dt} &= \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_q} + \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \\ &= \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial X_p} \frac{\partial x_m}{\partial X_q} + \frac{\partial v_m^{(1)}}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \\ &= \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \frac{\partial x_n}{\partial X_q} A_{mn}^{(1)}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

It follows by induction that

$$\frac{D^\alpha e_{pq}}{Dt^\alpha} = \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \frac{\partial x_n}{\partial X_q} A_{mn}^{(\alpha)}, \quad (8.5)$$

where $A_{mn}^{(\alpha)}$ is defined by the recurrence formula (8.3). We assume that the relation (8.5) is valid for $\alpha = \alpha_0$ (say). Differentiating once with respect to time, we readily see that it is valid for $\alpha = \alpha_0 + 1$. Since equation (8.4) states that (8.5) is valid for $\alpha = 1$, it is valid generally.

It is easily seen from (8.5) that the trace of any product formed from the matrices \mathbf{e} , $D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$ may be expressed as the trace of a product formed from the matrices $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$. Consequently, since f^* is a polynomial scalar invariant of $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$, and can therefore be expressed as a polynomial in traces of products of these matrices, it can be expressed as a polynomial in traces of products formed from $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$.

Also, from (8.5), it is seen that any symmetric matrix polynomial in $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$ may be expressed in the form

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_m} \frac{\partial x_l}{\partial X_n} Q_{kl}, \quad (8.6)$$

where Q_{kl} is a symmetric matrix polynomial in the matrices $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$. Since $\|f_{rs}\|$ is a symmetric matrix polynomial in $\mathbf{e}, D\mathbf{e}/Dt, \dots, D^v \mathbf{e}/Dt^v$, it may be expressed in the form (8.6).

Thus, from (4.3), we see that if the material is isotropic and $e_{pq}(\tau)$ is a polynomial function of τ , of degree v the stress matrix may be expressed as a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$, in agreement with the theory formulated by RIVLIN & ERICKSEN (1955).

In the case when $e_{pq}(\tau)$ is not a polynomial function of τ , we assume, as in § 7, that it satisfies the conditions (7.9). We can then show, in a manner similar to that adopted in § 7, that the stress matrix may be approximated by a symmetric isotropic matrix polynomial in $\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_v$, with the neglect only of terms of order ε .

9. Transformation to Convected Coordinates

We now consider that the position of a typical particle P_0 of the body in its undeformed state is defined in a general curvilinear coordinate system θ^i . We further suppose that as the body is continuously deformed the curvilinear

system moves with the body so that the coordinates of the particle P_0 in the system ϑ^i are unaltered. The metric tensors of the system ϑ^i at time τ are denoted by $\gamma_{ij}(\tau)$ and $\gamma^{ij}(\tau)$ and these are defined by*

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{\partial x^m(\tau)}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial x^m(\tau)}{\partial \vartheta^j}, \quad \gamma^{ij}(\tau) = \frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^m(\tau)} \frac{\partial \vartheta^j}{\partial x^m(\tau)}. \quad (9.1)$$

We employ also the notation

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}(t) &= \gamma_{ij}, & \gamma^{ij}(t) &= \gamma^{ij}, \\ \gamma_{ij}(0) &= \Gamma_{ij}, & \gamma^{ij}(0) &= \Gamma^{ij}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

We may define at each instant of time τ the covariant base vectors $\gamma_i(\tau)$ at the particle P_0 along the coordinate curves of the ϑ^i system. Thus, $\gamma_i(\tau)$ has components $\partial x^j(\tau)/\partial \vartheta^i$ in the rectangular Cartesian coordinate system x^i . The contravariant base vectors $\gamma^i(\tau)$ at the particle P_0 and time τ are then defined by

$$\gamma^i(\tau) = \gamma^{i*} \gamma_r(\tau). \quad (9.3)$$

From (9.3) and (9.1), we see that $\gamma^i(\tau)$ has components $\partial \vartheta^i/\partial x^j(\tau)$ in the system x^i . We shall employ the notation

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) &= \gamma_i, & \gamma^i(t) &= \gamma^i, \\ \gamma_i(0) &= \Gamma_i, & \gamma^i(0) &= \Gamma^i. \end{aligned} \quad (9.4)$$

The contravariant stress tensor at the point ϑ^i at time t in the coordinate system ϑ^i is denoted by π^{ij} . The corresponding covariant and mixed stress tensors are π_{ij} and π_j^i . π^{ij} , π_{ij} and π_j^i may, of course, be related by the metric tensors γ_{ij} and γ^{ij} .

We shall now determine the expression for the contravariant stress tensor π^{ij} in terms of the metric tensors and base vectors of the coordinate system ϑ^i . We have

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^p} \frac{\partial \vartheta^j}{\partial x^q} \sigma^{pq}. \quad (9.5)$$

Introducing the expression (4.3) for σ^{pq} into (9.5), we obtain

$$\pi^{ij} = f^* \left[\underset{0}{g_{pq}}(\tau) \right] \gamma^{ij} + \left(\frac{\partial \vartheta^i}{\partial X^r} \frac{\partial \vartheta^j}{\partial X^s} - \frac{1}{3} \gamma^{ij} g_{rs} \right) f_{rs} \left[\underset{0}{g_{pq}}(\tau) \right]. \quad (9.6)$$

Now,

$$g_{pq}(\tau) = \gamma_{mn}(\tau) \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^p} \frac{\partial \vartheta^n}{\partial X^q}. \quad (9.7)$$

Hence,

$$g_{rs} = \gamma_{mn} \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^r} \frac{\partial \vartheta^n}{\partial X^s}. \quad (9.8)$$

* We may, of course, raise at will the indices on any symbol defined in the rectangular Cartesian coordinate system, without altering the significance of the symbol. In this section we shall do so in order to obtain the conventional balance of indices in tensor equations.

From (9.6) and (9.8), we obtain

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= f^* \left[g_{pq}^t(\tau) \right] \gamma^{ij} + \\ &+ \left(\delta_m^i \delta_n^j - \frac{1}{3} \gamma^{ij} \gamma_{mn} \right) \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^r} \frac{\partial \vartheta^n}{\partial X^s} f_{rs} \left[g_{pq}^t(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (9.9)$$

If the functionals f^* and f_{rs} are taken in the forms (4.6) and (4.7) respectively, we obtain immediately with (9.7) that

$$\begin{aligned} f^* \left[g_{pq}^t(\tau) \right] &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t K'{}^{m_1 n_1 m_2 n_2 \cdots m_k n_k} (t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\times \gamma_{m_1 n_1} (\tau_1) \gamma_{m_2 n_2} (\tau_2) \cdots \gamma_{m_k n_k} (\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^s} f_{rs} \left[g_{pq}^t(\tau) \right] &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t L'{}^{m n m_1 n_1 m_2 n_2 \cdots m_k n_k} (t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \times \\ &\times \gamma_{m_1 n_1} (\tau_1) \gamma_{m_2 n_2} (\tau_2) \cdots \gamma_{m_k n_k} (\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k, \end{aligned} \quad (9.10)$$

where

$$K'{}^{m_1 n_1 m_2 n_2 \cdots m_k n_k} = \frac{\partial \vartheta^{m_1}}{\partial X^{p_1}} \frac{\partial \vartheta^{n_1}}{\partial X^{q_1}} \frac{\partial \vartheta^{m_2}}{\partial X^{p_2}} \frac{\partial \vartheta^{n_2}}{\partial X^{q_2}} \cdots \frac{\partial \vartheta^{m_k}}{\partial X^{p_k}} \frac{\partial \vartheta^{n_k}}{\partial X^{q_k}} K^{p_1 q_1 p_2 q_2 \cdots p_k q_k}$$

and

$$\begin{aligned} L'{}^{m n m_1 n_1 m_2 n_2 \cdots m_k n_k} &= \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^r} \frac{\partial \vartheta^n}{\partial X^s} \frac{\partial \vartheta^{m_1}}{\partial X^{p_1}} \frac{\partial \vartheta^{n_1}}{\partial X^{q_1}} \frac{\partial \vartheta^{m_2}}{\partial X^{p_2}} \frac{\partial \vartheta^{n_2}}{\partial X^{q_2}} \cdots \frac{\partial \vartheta^{m_k}}{\partial X^{p_k}} \frac{\partial \vartheta^{n_k}}{\partial X^{q_k}} L^{r s p_1 q_1 p_2 q_2 \cdots p_k q_k}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

We note that the quantities $\partial \vartheta^i / \partial X^j$ occurring in the above expressions are the components of the contravariant base vectors $\boldsymbol{\Gamma}^i$ of the curvilinear system ϑ^i in the undeformed state of the body.

If the material is isotropic so that the functionals f^* and f_{rs} in (9.9) take the forms (5.9) and (5.10), then, with (9.7) and the notation

$$\boldsymbol{\gamma}^*(\tau) = \|\boldsymbol{\Gamma}^{ik} \gamma_{ij}(\tau)\| \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\Gamma} = \|\boldsymbol{\Gamma}^{ij}\|, \quad (9.12)$$

we see that

$$f^* = \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \varphi^{*(k)} \{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_1), \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_2), \dots, \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_k)\} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k$$

and

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \vartheta^m}{\partial X^r} \frac{\partial \vartheta^n}{\partial X^s} f_{rs} \right\| &= \sum_{k=0}^R \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \boldsymbol{\Phi}^{*(k)} \{t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \\ &\boldsymbol{\gamma}^*(\tau_1), \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_2), \dots, \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_k)\} \boldsymbol{\Gamma} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k, \end{aligned} \quad (9.13)$$

where $\varphi^{*(k)}$ is a polynomial scalar invariant of $\boldsymbol{\gamma}^*(\tau_1), \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_2), \dots, \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_k)$, linear in each of them, and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ and $\boldsymbol{\Phi}^{*(k)}$ is a symmetric isotropic matrix polynomial in $\boldsymbol{\gamma}^*(\tau_1), \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_2), \dots, \boldsymbol{\gamma}^*(\tau_k)$, linear in each of them and a function of $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.

Acknowledgment. The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the U. S. Office of Naval Research under Contract Nonr-562(10) with Brown University.

King's College, Newcastle-upon-Tyne
and
Brown University, Providence, Rhode Island

(Received May 15, 1957)

References

FRÉCHET, M.: Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup. (3) **27**, 193-216 (1910).
GREEN, A. E.: Proc. Roy. Soc. A **234**, 46-59 (1956a).
 J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956b).
NOLL, W.: J. Rat. Mech. Anal. **4**, 3-81 (1955).
OLDROYD, J. G.: Proc. Roy. Soc. A **200**, 523-541 (1950).
RIVLIN, R. S.: J. Rat. Mech. Anal. **4**, 681-701 (1955).
 J. Rat. Mech. Anal. **5**, 179-187 (1956).
 & J. L. ERICKSEN: J. Rat. Mech. Anal. **4**, 323-425 (1955).
TRUESDELL, C.: J. Rat. Mech. Anal. **1**, 125-300 (1952).
 J. Rat. Mech. Anal. **2**, 593-616 (1953).
 J. Rat. Mech. Anal. **4**, 83-133 (1955).
VOLTERRA, V.: Theory of Functionals. London: Blackie & Son 1930.
WEYL, H.: The Classical Groups. Princeton, U.S.A. 1939.

The isothermal Expansion of a Gas Cloud into a Non-uniform Atmosphere

M. H. ROGERS

Communicated by G. C. MCVITTIE

A study is made of the isothermal motion of a spherically symmetric shell of gas surrounding a uniformly expanding sphere. The undisturbed gas ahead of the expanding region is assumed to have a density distribution given by the law $\rho = \rho_c r^{-\alpha}$, and the flow is examined for different values of α . It is found that in all cases the flow is necessarily headed by a shock wave, and that there is a minimum value of the shock strength, which depends on α , in order that this type of flow can exist. The other effect of the density variation ahead of the shock front is on the thickness of the expanding shell of gas; as α increases up to its limiting value of 3 the thickness of the expanding region increases indefinitely. Approximate solutions are also obtained for the flow in certain cases and these are in good agreement with the exact solutions, obtained by numerical integration of the equations governing the motion.

Introduction

An idealized problem describing the hydrodynamic effects due to an early O-star in an interstellar gas cloud is considered in this paper. As an O-star is forming its ultra-violet radiation will ionize the hydrogen in its immediate neighborhood, and this is referred to as the H II region. This then expands into the surrounding unionized gas and various estimates [see for example, J. H. OORT (1955)] of the velocity of expansion are of the order of 10 kms./sec. As this region expands it compresses some of the surrounding gas into a shell, while at sufficiently great distances the gas is undisturbed; a representation of the motion is shown in Fig. 1. The isothermal expansion of a spherically symmetric gas cloud has been considered by SAVEDOFF & GREENE (1955); the model employed consisted of an expanding H II region surrounded by a dense H I region, and this was taken to be expanding into an undisturbed H I region and separated from it by a shock front. The velocity of expansion of the dense shell was about 14 kms./sec. and its density was of the order of two hundred times that of the undisturbed region. However, these authors considered the case when conditions in the undisturbed H I region were uniform; in the present paper a study is made of the effects on the motion of the dense H I region due to non-uniform conditions ahead of the shock front. In this investigation the H II region is replaced by a uniformly expanding sphere, across which there is no mass flow; when the H II region is present, there may well be some mass flow across the ionization front separating the two regions, but this will not be

considered. When the density and pressure of a gas vary in some fashion ahead of an advancing shock front, the flow behind the shock front can be affected in several ways. In certain cases it has been found (ROGERS 1957) that cavitation can occur; while in a study of the propagation of weak shocks, WHITHAM (1953) has shown that the strength of a shock wave can increase for particular density distributions. In the present paper it will be seen that the effect of a decreasing density in the undisturbed gas is to impose minimum values on both the shock strength and the velocity of expansion of the shock front. The density is taken to vary as a power of the radial distance, and this makes it possible to obtain similarity solutions for the flow. This particular choice of density distribution is also convenient for considering the case when a shock wave moves into a cloud of increasing density; such a situation could possibly arise following the collision of two interstellar gas clouds, although it should be borne in mind that the restriction of a similarity solution has been imposed.

One feature of the motion of interstellar gas clouds is that the flow, in general, is not adiabatic. Now a complete discussion of the dynamics of the H I region would have to include energy losses due to radiation, collisions and other effects so that determination of the flow becomes extremely difficult. In the present work it will be assumed that the temperature of the neutral hydrogen region remains constant, so that the flow is isothermal. This is equivalent to assuming that the time taken by the gas to reach equilibrium with the radiation field is short compared with the length of time for which the motion persists, and a discussion of this point is given by SAVEDOFF & GREENE (*loc. cit.*).

The Equations of Motion and the Boundary Conditions

In view of the results obtained by Sir GEOFFREY TAYLOR (1946) it seems likely that the expanding H I region will always be headed by a shock wave, and indeed this will be seen to be the case. Accordingly, exact solutions of the equations of gas dynamics are sought in which the velocity and density of the gas are of the form

$$(1) \quad u = c f(z),$$

$$(2) \quad \varrho = \varrho_0(R) h(z),$$

where c is the velocity of sound in the gas, $z = r/ct$ is a nondimensional similarity variable and $\varrho_0(R)$ is the density of the undisturbed gas at the boundary of the expanding H I region. At this boundary there are two possibilities: in the first place a shock wave may be present, which necessitates abrupt changes in the velocity and density of the gas, or, alternatively, the transition between the two regions may be gradual, so that the velocity vanishes and the density of the gas is continuous across the boundary. Since r is the radial distance and t is the time, a particle moving in such a way that its value of z remains constant is necessarily moving with a constant velocity, and this fact will be used in

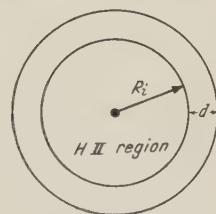


Fig. 1. Diagram of the spherically symmetric flow. At the center is an expanding H II region of radius of R_i ; this is surrounded by a shell of neutral hydrogen of thickness d , which is expanding into the undisturbed gas cloud

considering the motion of the uniformly expanding sphere. In view of the assumption of spherical symmetry, the equation of motion is

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

while the equation of continuity is

$$(4) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \varrho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\varrho u}{r} = 0,$$

where p is the pressure of the gas. To complete the equations governing the motion of the gas an energy equation is necessary, and as explained in the introduction the flow is taken to be isothermal so that the third equation is simply

$$(5) \quad p = \varrho c^2.$$

It should be pointed out at this stage that this equation is inaccurate near the shock front and a complete treatment of the problem would have to take account of radiation losses. The motion of a fluid in a field of radiation has been considered by L. H. THOMAS (1930) and ROSSELAND (1926), while the effect of radiation losses within the shock front itself has been investigated by R. G. SACHS (1946). However, an important difference between these three papers on the one hand and the assumption expressed in equation (5) on the other should be noted; when the radiation terms are omitted from the results obtained by each of the three authors mentioned above, the equations of classical aerodynamics are recovered. In the present case this is not so, since the flow examined here corresponds to the singular case $\gamma = 1$.

On substituting equations (1), (3) and (5) into equations (3) and (4) the following two ordinary differential equations are obtained:

$$(6) \quad (f - z) f' = - \frac{h'}{h},$$

$$(7) \quad (f - z) h' + h \left(f' + \frac{2f}{z} + \Phi \right) = 0,$$

where

$$(8) \quad \Phi = \frac{V t}{\varrho_0(R)} \frac{d \varrho_0}{d R},$$

a prime denotes differentiation with respect to z , and

$$(9) \quad v = \frac{d R}{d t}$$

is the velocity of the outer boundary of the expanding H I region. If this boundary is a shock wave, then certain conditions must be satisfied here and these will now be discussed. In the first place mass must be conserved, and this can be expressed by the equation

$$(10) \quad \varrho_0 v = \varrho_1 (v - u_1),$$

where the subscripts 0 and 1 denote conditions immediately ahead of and behind the shock front respectively. Secondly, momentum is conserved across the shock front, and this can be written in the form

$$(11) \quad \varrho_1 u_1 (u_1 - v) = p_0 - p_1.$$

Finally, the usual conservation of energy condition will not be used but, in accordance with the assumption of this paper, it will be replaced by the condition that the flow remains isothermal so that

$$(12) \quad \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Equations (10), (11) and (12) can be solved for the velocity and density of the gas immediately behind the shock front so that

$$(13) \quad u_1 = v \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right)$$

and

$$(14) \quad \rho_1 = \rho_0(R) \frac{v^2}{c^2}.$$

It is then possible to fit these boundary values to the flow, if the motion of the shock front is such that it is defined by a fixed value of z , which will be denoted by z_s . It follows that

$$(15) \quad z_s = R/c t$$

and so from this relation and equation (9),

$$(16) \quad v = c z_s.$$

Equation (16) shows that the velocity of expansion of the shock front is uniform and, further, that the value z_s is simply the ratio of the velocity of the shock front to the velocity of sound in the gas, or in other words the Mach number of the flow. The function Φ which occurs in equation (8) can now be found, since in the present model the density of the undisturbed gas is taken to vary as a power of the distance from the center so that

$$(17) \quad \rho_0(r) = \rho_c r^{-\alpha}$$

where ρ_c and α are constants. Of course, such a density distribution is unstable unless there is some force present which is capable of maintaining this configuration. However the point of this paper is to investigate the effect on the flow of a variation in density ahead of the shock front. Even if this particular density law is valid only over a limited region of space and for a limited period of time, the results obtained can still be expected to give some indication of the possible effects on the flow, and contribute to a better understanding of the hydrodynamics involved. It should be noted at this stage that if the effect of gravitation is included, either assuming the gas to be self gravitating or assuming the gravitational field to be caused by a central mass, then similarity solutions do not exist and the resulting flow would have to be determined from the integration of partial, rather than ordinary differential equations.

By using equations (15), (16) and (17) it can be seen that

$$(18) \quad \Phi = -\alpha.$$

Different values of α can now be substituted into equations (6) and (7) and the resulting velocity and density distributions found by numerical integration.

If the outer boundary of the expanding shell is not a shock front, then the boundary conditions would be, by equations (4) and (2)

$$(19) \quad f(z_s) = 0$$

and

$$(20) \quad h(z_s) = 1.$$

At the inner boundary, it is assumed that the expanding H II region is replaced by a uniformly expanding sphere, and consequently there will be no mass flow across this surface. If the radius of this sphere at any time t is given by the equation

$$(21) \quad R_i = v_i t$$

then

$$(22) \quad z_i = \frac{R_i}{c t} = \frac{v_i}{c}$$

and is therefore a constant. Furthermore, the velocity of the gas at $z = z_i$ is, from equation (1), $c f(z_i)$ and since this is the same as the velocity of the expanding sphere

$$(23) \quad c f(z_i) = v_i$$

or, by using equation (22) this is equivalent to

$$(24) \quad f(z_i) = z_i.$$

The value of the density at the inner boundary is not known, and will have to be determined from integration of the equations governing the motion.

Variation of Velocity Distribution With α

When equations (6) and (7) are combined, it is possible to obtain a first order differential equation for the function f and this can be written as

$$(25) \quad \frac{df}{dz} = \frac{2(f/z) - \alpha}{(f - z)^2 - 1}.$$

In general it does not appear possible to integrate this equation in a closed form: however it is possible to discuss the general behavior of solution curves, and then particular solutions can easily be found by numerical processes.

From equation (25) it can be seen that the velocity gradient df/dz is infinite along the lines $f - z \pm 1$ in the (z, f) plane; physically this means that a shock wave must occur in the gas. In addition $\frac{df}{dz}$ is zero along the line $f = \frac{\alpha}{2} z$. This line will intersect the lines $f - z \pm 1$ at two points which are therefore singular points of the differential equation (25). Since we are only interested in positive values of z , the relevant singular point is found to be

$$(26) \quad z_A = \pm \frac{2}{2 - \alpha},$$

$$(27) \quad f_A = \pm \frac{\alpha}{2 - \alpha},$$

where the positive sign is to be taken when α is less than 2 and the negative sign when α is greater than 2. The nature of the singularity can be determined

from the classical theory of non-linear differential equations (STOKER 1950); when α is greater than $8/3$ the singularity is a spiral point, otherwise it is a node.

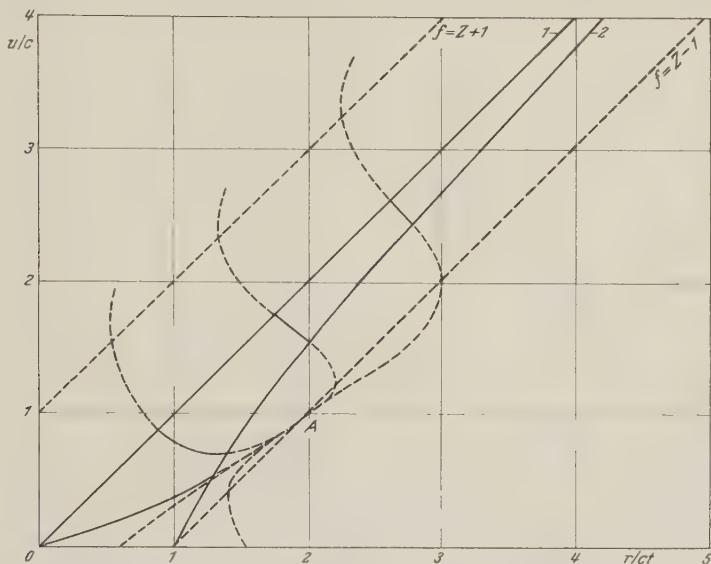


Fig. 2 a-d. Velocity fields for different density distributions in the undisturbed gas. In each diagram the line 1 is the line $f = z$ and represents the surface of the uniformly expanding sphere. The curve 2 is given by $f = z - \frac{1}{z}$ and represents the shock front; the region between the two represents the expanding shell and the solution curves of physical interest are shown as unbroken lines. a) $\alpha = 0$

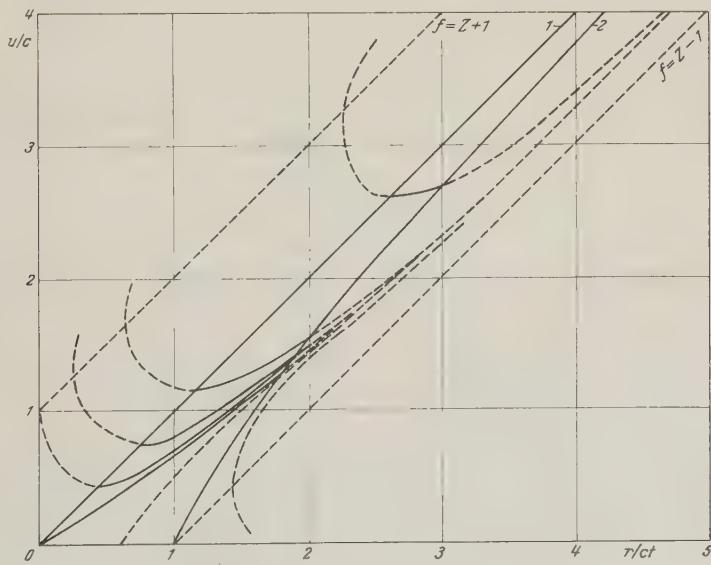
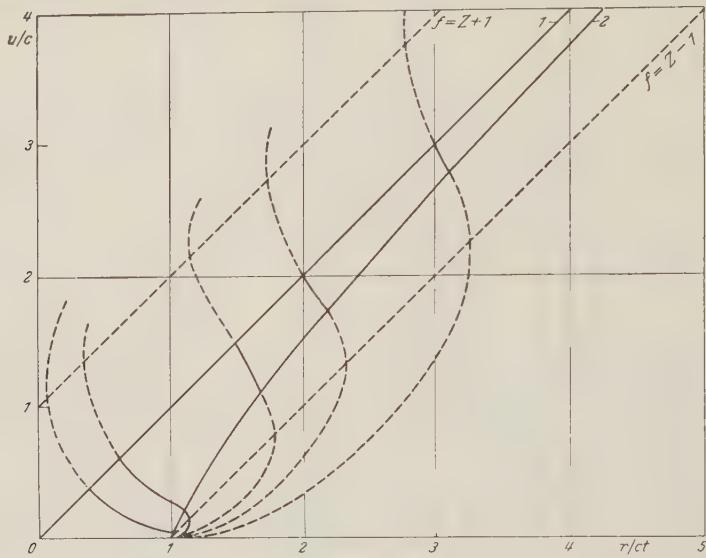
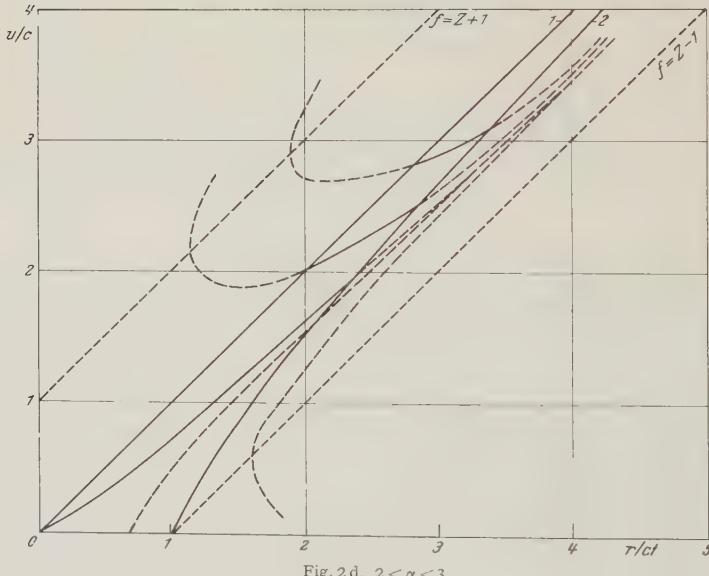


Fig. 2 b. $0 < \alpha < 2$

It is now possible to determine the velocity field for different values of α and the results are displayed in Fig. 2. In each case, a particular solution starts on the line $f = z$, which represents the surface of the uniformly expanding sphere,

and can be followed until either it crosses the z -axis, which means that the velocity of the gas vanishes and we have reached the edge of the disturbed region, or alternatively the velocity gradient becomes infinite. This latter condition

Fig. 2c. $\alpha=2$ Fig. 2d. $2 < \alpha < 3$

means that a shock wave must exist in the flow, and from equation (13) it is a simple matter to determine where the shock front must occur. By using equations (1) and (16) the shock wave boundary condition can be written as

$$(28) \quad f(z_s) = z_s - \frac{1}{z_s}.$$

This curve has been plotted on each of the four cases in Fig. 2 and two results are immediately apparent. Firstly, no matter how small the velocity of expansion, a shock wave must always occur: no solution curve starting from the line $f = z$ can cross the f -axis without first crossing the line $f = z - 1$. This result is in agreement with that obtained by Sir GEOFFREY TAYLOR in the case of a uniform atmosphere. Secondly, in all cases except $\alpha = 0$ (which is the case of a uniform atmosphere ahead of the expanding shock front) there is a lower limit to the shock strength in order that this type of flow may exist. The solution curve corresponding to this critical value passes through the origin and meets the shock curve at the point A . If the shock strength is weaker than this critical value, then it can be seen from Fig. 2 that a solution in which the flow is continuous all the way from the shock front to the surface of the expanding sphere does not exist: the fact that for very weak shocks the solution curve crosses the z -axis and gives negative values of f would seem to indicate the possibility of a back flow in this region. An approximate form for the critical solution can be obtained using a power series development for f , and by calculating the coefficients by direct substitution into equation (25); the leading terms are found to be

$$(29) \quad f(z) = \frac{\alpha}{3} z + \frac{\alpha}{15} \left(\frac{\alpha}{3} - 1 \right)^2 z^3 + \frac{\alpha}{105} \left(\frac{\alpha}{3} - 1 \right)^3 \left(\frac{5\alpha}{3} - 3 \right) z^5 + \dots$$

Now at the shock front $z = z_s$, and from equations (28) and (29) it follows that z_s and α are related by the equation

$$(30) \quad z_s - \frac{1}{z_s} = \frac{\alpha}{3} z_s + \frac{\alpha}{15} \left(\frac{\alpha}{3} - 1 \right)^2 z_s^3 + \frac{\alpha}{105} \left(\frac{\alpha}{3} - 1 \right)^3 \left(\frac{5\alpha}{3} - 3 \right) z_s^5 + \dots$$

The terms in the series on the right hand side decrease quite rapidly provided that z is not too large, and in the case $\alpha = 1$ a value of $z_s = 1.271$ was obtained by retaining the first two terms only, as against a value of 1.2844, obtained by numerical integration. However for larger values of z_s numerical methods were used and the results are given in Fig. 3. This figure shows the variation of α with z_s , the critical Mach number for the flow. It can be seen that as α approaches the value 3 the Mach number increases rapidly, and in fact for the limiting case $\alpha = 3$ (which corresponds to an infinite mass of gas in the original configuration) the solution reduces to the blast wave solution, discussed in a previous paper (ROGERS 1957).

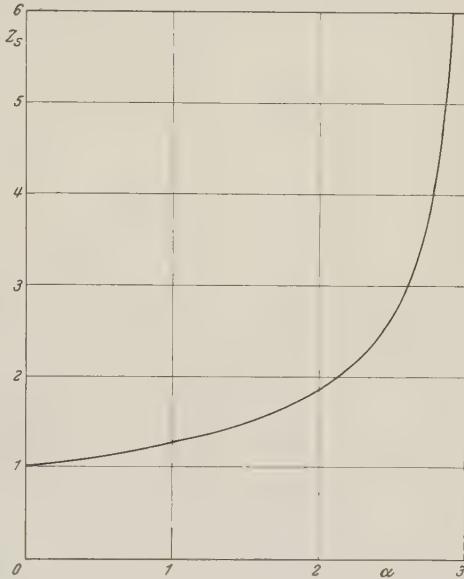


Fig. 3. Curve showing critical value of Mach number plotted against α ; the case $\alpha = 3$ corresponds to an infinite value for the mass of gas in the initial configuration. Note that when the density decrease is less than the inverse square law, the critical Mach number is quite small; large values are attained only as α approaches the limiting value of 3

Density Distribution

The density of the gas is, from equations (2) and (17),

$$(31) \quad \rho = \rho_c R^{-\alpha} h(z).$$

The function $h(z)$ can be found from equation (6) by numerical integration once $f(z)$ has been computed from equation (25). Numerical integrations were performed, in the case $\alpha = 1$, for different values of the shock strength and the

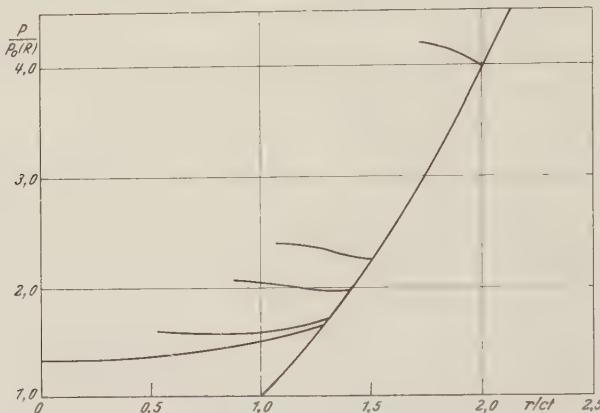


Fig. 4. Density Profiles in motion surrounding uniformly expanding sphere. The single curve meeting all the profiles represents the shock front, $h_s = z_s^2$. The value $\alpha = 1$ has been used here

results are shown in Fig. 4. These calculations and all the other numerical integrations in this paper were done on the University of Illinois digital computer. It is interesting to note that although the value of the density at the surface of the expanding sphere is not known it is still possible to start the integration at this inner boundary with an arbitrary value of h and then correct it at the shock front by using this boundary condition, equation (14). The reason for this

Table 1

M	ρ_i/ρ_0	d/R_i	ρ_i/ρ_1	u_i/c	$w(z)/z_s^2$
1.2844	1.319	∞	.799	.0	.500
1.30	1.589	1.482	.940	.524	.500
1.50	2.399	.413	1.066	1.061	.500
2.0	4.218	.162	1.055	1.721	.500
5.0	25.247	.021	1.010	.899	.500
10.0	100.249	.005	1.002	0.950	.500
15.0	225.250	.002	1.001	4.967	.500

is, of course, that the equations governing the motion are homogeneous in ρ , and hence in h , due to the fact that the flow is isothermal. To obtain a physical picture of the expanding region it is convenient to compute the ratio of the density at the inner boundary, that is at the surface of the expanding sphere, to its value immediately ahead of the shock front and these results are displayed in Table 1, Column 2. It can be seen that as the Mach number of the flow increases, the density ratio increases roughly as the square of the Mach number.

Column 4 in this table gives the ratio of the density at the inner boundary to its value immediately behind the shock front; it is seen that this ratio is close to unity in the cases except near the critical solution, shown in the first row.

The total mass contained in the expanding region can be calculated quite simply: because of the similarity assumption it is evident that this must be equal to the total mass of gas originally contained in a sphere of the same radius R . Hence from equations (2) and (17) it follows that

$$(32) \quad 4\pi \int_0^R \rho_c r^{-\alpha} r^2 dr = 4\pi \int_{R_i}^R \rho r^2 dr$$

and by using equations (15) and (16) this is equivalent to

$$(33) \quad \frac{z_s^3}{3-\alpha} = \int_{z_i}^{z_s} z^2 h(z) dz \equiv w(z_s).$$

The integral $w(z_s)$ was evaluated numerically and the results are shown in column 6 of Table 1; this serves as a useful check on the accuracy of the calculations.

The density distribution in the case of the critical solution has been found by numerical methods, but it is worth nothing that a series expansion is also

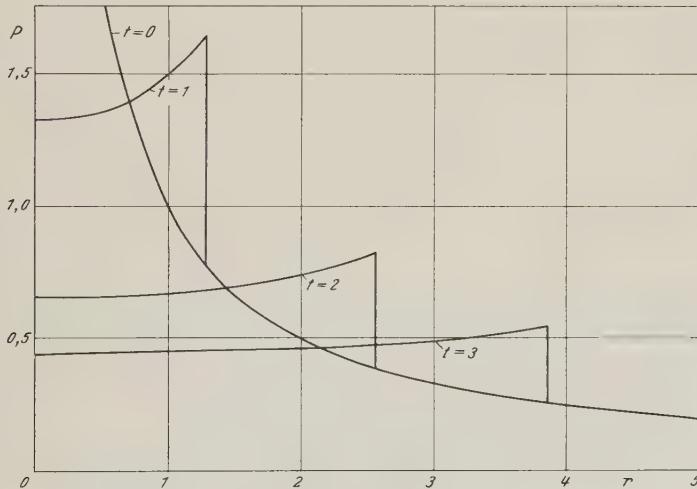


Fig. 5. Density Profiles at successive times, in the case $\alpha = 1$

possible. When the expression for f , equation (29), is substituted into the equation of motion (equation 6), the following series expansion for h is obtained, in the case $\alpha = 1$

$$(34) \quad h = h_c [1 + \frac{1}{9} z^2 + \frac{1}{54} z^4 + O(z^6)].$$

In this expression h_c is a constant of integration which can be determined from the boundary condition on the density at the shock front, given by equation (14). Succeeding terms in this expansion decrease quite rapidly, so that equation (34) gives a good approximation to the density distribution in the critical case. Some

idea of the accuracy of the expansion may be gained by comparing the approximate value 1.337 of h_c , obtained by including the first three terms only of equation (34), with the value 1.319 obtained by numerical integration; an error of less than 2%. The actual value of the density at any time is of course given by equations (2) and (17)

$$(35) \quad \rho = \rho_c R^{-\alpha} h(z)$$

and in order to get a clearer picture of the nature of the flow, it is of interest to evaluate this at different times during the motion. Accordingly, in Fig. 5, the density profiles at successive intervals of time are shown for the critical solution, and this demonstrates the effectiveness of the shock wave in producing a more uniform density distribution within the gas cloud.

Approximate Solution for Strong Shocks

As can be seen from Fig. 2, the thickness d of the expanding region is small compared with the radius R_i of the expanding sphere for strong shocks, provided that α does not assume values close to the limiting case $\alpha = 3$. Column 3 of Table 1 gives computed values of the ratio of d to R_i for the case $\alpha = 1$, and it is seen that even for a Mach number of 2 this ratio is quite small. Since the chief interest lies in flows headed by shock waves having a Mach number of the order of ten, it is worth while to investigate an approximate solution of equations (6) and (7), which is applicable to such cases.

A new coordinate ϑ is therefore defined by the relation

$$(36) \quad z = z_i(1 + \vartheta)$$

so that at the shock front, where ϑ assumes its maximum value ϑ_s , it follows that

$$(37) \quad \vartheta_s = \frac{z_s - z_i}{z_i} = \frac{d}{R_i}.$$

If series expansions for f and h are now substituted into equations (6) and (7) and the boundary conditions (24) employed, the following expressions for the velocity and density are obtained:

$$(38) \quad f = z_i \{1 + (\alpha - 2)\vartheta + (3 - \alpha)\vartheta^2 + \dots\},$$

$$(39) \quad h = h_c \left\{1 - \frac{(\alpha - 3)(\alpha - 2)}{2} z_i^2 \vartheta^2 - \frac{(\alpha - 3)(8 - 3\alpha)}{3} z_i^2 \vartheta^3 + \dots\right\}$$

where h_c is a constant of integration which can be determined from the boundary conditions at the shock front. From equations (13), (14) and (16) we have

$$(40) \quad f_s = z_s - \frac{1}{z_s}$$

and

$$(41) \quad h_s = z_s^2.$$

When these results are substituted into equations (38) and (39) it is found that

$$(42) \quad \frac{1}{(3 - \alpha) z_i^2} = \vartheta_s + O(\vartheta_s^3)$$

and

$$(43) \quad h_c = z_i^2 \left[1 + \frac{6-\alpha}{2} \vartheta_s + \frac{1}{3} \vartheta_s^2 + O(\vartheta_s^3) \right].$$

Equation (42) shows that this approximate solution will be valid as long as $(3-\alpha)^{-1} z_i^{-2}$ is small: this method is applicable to the motion behind strong shocks in all cases except when $(\alpha-3)$ is small. Equation (39) shows that the density distribution is parabolic to a first approximation, except for the case $\alpha=2$ when a cubic profile results. Table 2 gives computed values in the case $\alpha=1$ for varying shock strengths: on comparing these with the results in Table 1, which of course were obtained by numerical integration of the exact equations, it is seen that the accuracy of this method is good down to shocks of Mach number two. Column 5 in both Tables 1 and 2 gives the ratio of the velocity of the

Table 2

M	ϱ_i/ϱ_0	$d/R_i \equiv \vartheta_s$	ϱ_i/ϱ_1	u_i/c
2	4.19	.172	1.05	1.71
3	9.23	.063	1.30	2.82
5	25.25	.021	1.01	4.90
10	100.25	.005	1.003	9.95
15	225.25	.002	1.001	14.97

surface of the expanding sphere to the velocity of sound in the gas, and for shocks with high Mach numbers this is very nearly the same as the Mach number of the shock itself.

Discussion of Results

One of the chief effects of the variation in density of the undisturbed gas ahead of the shock front is on the thickness of the compressed expanding region. From equation (37) it is seen that the ratio of this thickness to the ratio of the uniformly expanding sphere is simply given by ϑ_s , and the approximate value of this is given by equation (42) in cases when this is small. However, when α assumes values close to the limiting value of 3, this approximation is no longer valid and it can be seen from Fig. 2 that the thickness of the shell increases considerably in such cases. This indicates that when an expanding wave of the type considered moves into even a limited region in which there is a sudden decrease in density, considerable expansion of the compressed region will occur.

The existence of the minimum shock strength is also interesting since the boundary of the flow, the uniformly expanding sphere, does not exist in this critical solution. The corresponding density profile shows the effectiveness of even weak shock waves in smearing out non-uniform density distributions in a gas cloud, which could for example be caused by turbulence or by collisions of interstellar gas clouds. Another general feature of the solutions presented here is the accuracy of approximate solutions under certain restricted conditions; the complete equations governing the motion of a compressible gas present a serious obstacle in the study of cosmical gas dynamics, but the present results demonstrate that in certain cases a relatively simple approximate solution can give excellent agreement with the exact solution.

Finally, it may be remarked that by fitting non-homogeneous boundary conditions to progressive wave type solutions of the equations of gas dynamics it is possible to give a physical interpretation to a large class of solutions, and this method is capable of extension to other flows of compressible fluids.

References

OORT, J. H.: Gas Dynamics of Cosmic Clouds, pp. 147—158. New York: Interscience Publishers, Inc. 1955.

ROGERS, M. H.: Ap. J. **125**, 478 (1957).

ROSSELAND, S.: Ap. J. **63**, 342 (1926).

SACHS, R. G.: Phys. Rev. **69**, 514 (1946).

SAVEDOFF, M. P., & J. GREENE: Ap. J. **122**, 477 (1955).

STOKER, J. J.: Nonlinear Vibrations. New York: Interscience Publishers, Inc. 1950.

TAYLOR, Sir GEOFFREY: Proc. Roy. Soc. A **186**, 273 (1946).

THOMAS, L. H.: Quart. J. Math. **1**, 1 (1930).

WHITHAM, G. B.: Commun. Pure Appl. Math. **6**, 397 (1953).

University of Illinois Observatory

(Received March 5, 1957)

The Pi Theorem of Dimensional Analysis

LOUIS BRAND

Communicated by C. TRUESDELL

1. Introduction

The fundamental principle in dimensional analysis is known as the Pi Theorem. While the ideas involved were used by earlier authors, BUCKINGHAM [1] stated the theorem essentially as follows:

If an equation in n arguments is dimensionally homogeneous with respect to m fundamental units, it can be expressed as a relation between $n - m$ independent dimensionless arguments.

It is well known that this useful practical rule is not strictly correct [2]. We shall give a simple, *constructive* proof of the theorem in its rigorous form. This makes no use of partial differentiation [3] or abstract spaces [4, 5] and is based upon a simple idea already used in dealing with homogeneous functions. Although dimensional quantities may be regarded as elements of a vector space defined by a set of postulates [6], the Pi Theorem needs no elaborate logical setting. The proof given in § 4 depends only on matrix algebra. However we shall sketch two other recent treatments, due to BIRKHOFF [7] and DROBOT [8] respectively, at the end of this paper.

In applying the Pi Theorem to actual problems, considerations beyond the domain of pure mathematics may enter. Thus certain "paradoxes" have arisen which have occasioned much discussion [9]. These paradoxes are not due to any failure of the Pi Theorem; for this is a straightforward mathematical proposition of universal validity. The successful application of dimensional analysis nearly always depends on a real understanding of the essential variables involved in the problem. But for every physical assumption, the Pi Theorem gives a corresponding answer; and experiment alone can decide which of several answers most nearly matches the facts. We proceed therefore, without physics or metaphysics [9], to lay down a few definitions essential for a precise statement of the Pi Theorem.

2. Dimensional Matrix

We consider problems in which the physical quantities X_i involved have positive measures x_i which depend upon a system of m fundamental units U_1, U_2, \dots, U_m . When these units are changed to

$$(1) \quad U'_j = U_j/t_j \quad (t_j > 0),$$

the positive variables x_i also change. If the new value x'_i is related to the old by the equation

$$(2) \quad x'_i = t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \dots t_m^{a_{im}} x_i,$$

we say that x_i (strictly X_i) has the dimensions

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$$

in the units U_1, U_2, \dots, U_m . If all $a_{ij} = 0$, x_i is said to be *dimensionless*. In any case the dimensions a_{ij} are real numbers.

The dimensions of n quantities X_i may be arranged in a rectangular $n \times m$ matrix:

	U_1	U_2	\dots	U_m
x_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2m}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_n	a_{n1}	a_{n2}	\dots	a_{nm}

We denote this *dimensional matrix* (a_{ij}) by A .

In mechanics the fundamental units are of length L , time T , and mass M , and $m = 3$. For example in dealing with the speed of sound v in a gas, the additional variables involved are the pressure ρ , density ϱ , and viscosity μ of the gas; and the dimensional matrix has the form:

	L	T	M
v	1	-1	0
ρ	-1	-2	1
ϱ	-3	0	1
μ	-1	-1	1

Lemma. If x_1, x_2, \dots, x_n have the dimensional matrix A and the products

$$(3) \quad y_i = x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_n^{b_{in}}, \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

have the exponential matrix $(b_{ij}) = B$, then y_1, y_2, \dots, y_p have the dimensional matrix BA .

Proof. From (2) we have

$$y'_i = x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_n^{b_{in}} = t_1^{c_{i1}} t_2^{c_{i2}} \dots t_m^{c_{im}} y_i$$

where $c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + \dots + b_{in}a_{nj}$. Thus the dimensional matrix (c_{ij}) of the y' 's is $C = BA$.

A matrix is said to be of *rank r* if it contains at least one non-zero determinant of order r , while all determinants of higher order which the matrix may contain are zero. If the matrix contains *no* determinants of order $r+1$, it will be of rank r if it contains one non-zero r -rowed determinant. Thus if $m < n$, the $n \times m$ dimensional matrix A is of rank m when it contains a single non-zero m -rowed determinant. This is the usual situation in dimensional analysis.

3. Isobaric Functions

Let the measure x of the physical quantity be expressed as a function of x_1, x_2, \dots, x_n :

$$x = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

If this equation holds for all changes of units, it becomes

$$x' = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

when $U'_i = U_i/t_i$. Hence if x has the dimensions (a_1, a_2, \dots, a_m) , we have from (2)

$$t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_m^{a_m} x = f(t_1^{a_{11}} t_2^{a_{12}} \dots t_m^{a_{1m}} x_1, \dots).$$

Thus under the given unit change the function satisfies the identity in t_1, t_2, \dots, t_m :

$$(4) \quad f(t_1^{a_{11}} t_2^{a_{12}} \dots t_m^{a_{1m}} x_1, t_1^{a_{21}} t_2^{a_{22}} \dots t_m^{a_{2m}} x_2, \dots) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_m^{a_m} f(x_1, x_2, \dots).$$

Such a function is said to be *isobaric* with the dimensions (a_1, a_2, \dots, a_m) . We use the term “isobaric” (Greek *isos*, equal; *barus*, heavy) in preference to the more cumbersome phrase “dimensionally homogeneous”.

We note that isobaric functions relative to m fundamental units U_1, \dots, U_m are also isobaric with respect to any subset of these units, say U_1, U_2, \dots, U_k ($k < m$); for in the identity (4) we need only put $t_{k+1} = t_{k+2} = \dots = t_m = 1$. Thus the isobaric functions relative to U_1, U_2, \dots, U_k form a larger class than the functions isobaric relative to U_1, U_2, \dots, U_m ($m > k$). In brief, *the fewer the fundamental units, the larger the class of corresponding isobaric functions*. We shall later have occasion to use this fact in explaining an alleged paradox.

If the sum

$$(5) \quad f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

with dimensionless coefficients is isobaric, each of its terms must have the same dimensions. For if we apply (4) and put $t_j = t$ and all other t 's equal to 1, we get

$$t^{a_{1j}} c_1 x_1 + t^{a_{2j}} c_2 x_2 + \dots + t^{a_{nj}} c_n x_n = t^{a_j} f$$

or

$$t^{(a_{1j}-a_j)} c_1 x_1 + t^{(a_{2j}-a_j)} c_2 x_2 + \dots + t^{(a_{nj}-a_j)} c_n x_n = f.$$

Since the right-hand side of this identity in t is independent of t , the same must be true of the left-hand side; that is

$$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{nj} = a_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

All rows of the dimensional matrix are now identical.

The product

$$(6) \quad f = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

is an isobaric function whose dimension a_j in any unit U_j is obtained by multiplying the dimensions of its factors by their exponents and adding the results:

$$(7) \quad k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \dots + k_n a_{nj} = a_j.$$

For if we change only U_j , say $U'_j = U_j/t$, we have

$$(t^{a_{1j}} x_1)^{k_1} (t^{a_{2j}} x_2)^{k_2} \cdots = t^{k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \cdots} f.$$

Since this is true for all $t > 0$, we see that f is isobaric with the dimension a_j given by (7) with respect to the unit in question.

4. The Pi Theorem

Let the function f in an equation

$$(8) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

with n arguments be isobaric with respect to m fundamental units U_1, U_2, \dots, U_m . Then if the $n \times m$ dimensional matrix of x_1, \dots, x_n is of rank $r = n - k$, the given equation is equivalent to

$$(9) \quad f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) = 0$$

in which the first r arguments are 1, and the π 's are $n - r$ independent and dimensionless products formed from x_1, \dots, x_n .

Proof. Let us first consider a special case. In ordinary analysis a function is said to be *homogeneous of degree a* , if for any $t > 0$,

$$(10) \quad f(t x_1, t x_2, \dots, t x_n) = t^a f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

is an identity in t . From our present point of view f is an isobaric function of dimension a with respect to a single unit U_1 ; and its arguments x_1, x_2, \dots, x_n have the dimensional matrix consisting of a column of n ones. Since (10) is an identity in t it will hold when $t = 1/x_1$; then we have

$$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) = x_1^{-a} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Hence the equation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ is equivalent to the equation

$$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) = 0$$

in the $n - 1$ dimensionless products $\pi_1 = x_2/x_1, \dots, \pi_{n-1} = x_n/x_1$. Since the dimensional matrix is of rank 1, we have proved the Pi Theorem for this case. The proof in the general case consists in a natural extension of this reasoning.

By suitably numbering the arguments x_j and the units U_j we can bring a non-singular $r \times r$ matrix P into the upper left corner of the dimensional matrix $A = (a_{ij})$. Then A may be written as a matrix of matrices

$$(11) \quad A = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}, \quad \text{where } \det P \neq 0.$$

If $n = r + k$, the sub-matrices P, Q, R, S are respectively $r \times r, k \times r, r \times k, k \times k$.

We first show that the sub-matrix

$$(12) \quad S = Q P^{-1} R.$$

Since A is of rank r , the last k rows of A , namely (Q, S) , are linear combinations of the first r rows (P, R) . Thus there exists a $k \times r$ matrix C such that $Q = CP$, $S = CR$; hence $C = QP^{-1}$ and $S = QP^{-1}R$.

After this preliminary, the proof in the general case is based on the same idea as that used in the preceding special case. In the defining equation (4)

of an isobaric function we set the first r arguments equal to 1; if we put $t_{r+1} = \dots = t_m = 1$ in these equations we can then determine t_1, \dots, t_r uniquely since $\det P \neq 0$. These t -values then define a change of units which converts $f(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ into a multiple of $f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \dots, \pi_k)$. However we present the argument in a modified form which is easier to follow.

If the $r \times r$ matrix $P^{-1} = (b_{ij})$, consider the r quantities

$$(13) \quad y_i = x_1^{b_{i1}} x_2^{b_{i2}} \dots x_r^{b_{ir}}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Since x_1, x_2, \dots, x_r have the $r \times m$ dimensional matrix (P, R) , the lemma shows that the quantities y_i have the $r \times m$ dimensional matrix

$$P^{-1}(P, R) = (I_r, P^{-1}R),$$

where I_r is the unit $r \times r$ matrix. Now take

$$t_1 = \frac{1}{y_1}, \quad t_2 = \frac{1}{y_2}, \quad \dots, \quad t_r = \frac{1}{y_r}, \quad t_{r+1} = \dots = t_m = 1$$

in the defining equation (4) of an isobaric function. Equation (8) is then equivalent to

$$(14) \quad f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \dots, \frac{x_r}{z_r}, \frac{x_{r+1}}{z_{r+1}}, \dots, \frac{x_n}{z_n}\right) = 0$$

where the n quantities

$$(15) \quad z_i = y_1^{a_{i1}} y_2^{a_{i2}} \dots y_r^{a_{ir}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Since their $n \times r$ exponential matrix is $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, the lemma shows that the z 's have the dimensional matrix

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} (I_r, P^{-1}R) = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & QP^{-1}R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}$$

in view of (12). Thus z_1, \dots, z_n have the same dimensional matrix as x_1, \dots, x_n ; consequently all the arguments x_i/z_i in (14) are dimensionless.

Finally, if we substitute y_i from (13) into (15) we have

$$(16) \quad z_i = x_1^{c_{i1}} x_2^{c_{i2}} \dots x_r^{c_{ir}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

To find the $n \times r$ exponential matrix $\begin{pmatrix} C_r \\ C_k \end{pmatrix}$ we have from the lemma

$$\begin{pmatrix} C_r \\ C_k \end{pmatrix} (P, R) = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & QP^{-1}R \end{pmatrix};$$

hence

$$C_r P = P, \quad C_r = I_r \quad \text{and} \quad C_k P = Q, \quad C_k = QP^{-1}.$$

The z 's in (16) therefore have the exponential matrix

$$(17) \quad C = \begin{pmatrix} I_r \\ QP^{-1} \end{pmatrix};$$

that is, $z_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) whereas z_{r+1}, \dots, z_n have the exponential matrix QP^{-1} . Equation (14) now becomes

$$(18) \quad f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{x_{r+1}}{z_{r+1}}, \dots, \frac{x_n}{z_n}\right) = 0,$$

an equation with $n-r$ dimensionless arguments, which are obviously independent since each contains an x_i (in the numerator) that none of the others contain. On writing

$$(19) \quad \frac{x_{r+i}}{z_{r+i}} = \pi_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

in (18) we obtain the equation (9) required by the theorem. These dimensionless arguments are readily found since z_{r+1}, \dots, z_{r+k} are given by (16) with the exponential matrix $Q P^{-1}$.

The above proof now enables us to state the Pi Theorem in a still more specific form.

Let x_1, x_2, \dots, x_n have the $n \times m$ dimensional matrix of rank $r = n - k$:

$$(20) \quad A = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & Q P^{-1} R \end{pmatrix},$$

where P is a non-singular $r \times r$ matrix. Then if $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is an isobaric function with respect to m fundamental units, the equation (8) is equivalent to equation (9) in which

$$\pi_i = x_1^{e_{i1}} x_2^{e_{i2}} \dots x_n^{e_{in}}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

are $k = n - r$ independent and dimensionless quantities with the $k \times n$ exponential matrix

$$(21) \quad E = (-Q P^{-1}, I_k)$$

where I_k is the $k \times k$ unit matrix.

In brief, the Pi Theorem states that

$$(22) \quad EA = 0.$$

As an example, consider the 6×4 dimensional matrix of rank 3:

$$A: \begin{array}{c|cccc} & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ \hline x_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ x_2 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ x_3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline x_4 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ x_5 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ x_6 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

To verify that A is rank 3 we note that the vectors $[x_4], [x_5], [x_6]$ in the last three rows are linear combinations of $[x_1], [x_2], [x_3]$; for example

$$[x_4] = -\frac{7}{3} [x_1] - \frac{1}{6} [x_2] - \frac{1}{2} [x_3].$$

We may take the 3×3 matrix in the upper left corner as P since $\det P = 6$. Then Q is the matrix in the lower left corner and

$$Q P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

The dimensionless products have the exponential matrix

$$E = (-QP^{-1}, I_3) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

hence

$$\pi_1 = x_1^{\frac{7}{3}} x_2^{\frac{1}{6}} x_3^{\frac{1}{2}} x_4, \quad \pi_2 = x_2^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{2}} x_5, \quad \pi_3 = x_1^3 x_2^{-\frac{1}{2}} x_3^{-\frac{1}{2}} x_6.$$

If we wish to avoid fractional exponents, $\pi_1^6, \pi_2^2, \pi_3^2$ may be taken as the dimensionless products.

We may readily verify that $EA = 0$, thus checking the calculation. The fact that $S = QP^{-1}R$, also shows that A is of rank 3.

5. Fundamental Units

In a certain area of knowledge let the quantities X involved belong to a certain class \mathcal{C} which includes the real numbers. The quantities U_1, U_2, \dots, U_m is said to form a set of *fundamental units* in the class \mathcal{C} if every $X \in \mathcal{C}$ may be expressed uniquely in the form

$$(23) \quad X = x U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m}, \quad x > 0;$$

here x is the measure of X and a_1, a_2, \dots, a_m are real numbers which give the *dimensions* of X in the units U_1, U_2, \dots, U_m respectively. The dimensions of X form a vector which in MAXWELL's notation is denoted by

$$(24) \quad [X] = (a_1, a_2, \dots, a_m).$$

It is customary, however, to write x for X in (24); then $[x]$ denotes the dimensions of the physical variable X whose positive measure is x . We shall adopt this convention.

When the units are fundamental $X = x$, a pure number, when and only when X is dimensionless, that is, when $[X] = 0$, the zero vector. Thus when the units are fundamental,

$$(25) \quad [X] = 0 \quad \text{implies} \quad X = x, \quad \text{a positive number.}$$

If U_1, U_2, \dots, U_m form a system of fundamental units, the system

$$V_i = U_1^{b_{i1}} U_2^{b_{i2}} \dots U_m^{b_{im}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

is also fundamental provided $\det b_{ij} \neq 0$. For the system of linear, homogeneous equations which state that

$$X = x V_1^{\alpha_1} V_2^{\alpha_2} \dots V_m^{\alpha_m}$$

is dimensionless in the units U_i has the solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ when and only when $\det b_{ij} \neq 0$; then $X = x$, a positive number.

In mechanics units of length, time and mass (L, T, M) are usually chosen as fundamental. But engineers often prefer to regard units of length, time and force (L, T, F) as fundamental. This is permissible since $F = L T^2 M$ and the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

To illustrate the importance of the choice of fundamental units let us consider the following problem [11] which leads to an alleged paradox in dimensional analysis.

A ball of diameter d is fixed in a stream of liquid and kept at a temperature ϑ above that of the liquid at a great distance from the ball. If the velocity of the stream is v and the liquid has the heat capacity c (per unit volume) and thermal conductivity k , find the rate r at which heat is transferred from the ball to the liquid.

Solution 1. Units of length, time, mass and temperature (L, T, M, H) taken as fundamental.

The dimensions of calories are those of energy, $L^2 T^{-2} M$. Since c is given in calories per degree per cubic centimeter,

$$[c] = (L^2 T^{-2} M) / (H L^3) = L^{-1} T^{-2} M H^{-1}.$$

The thermal conductivity k is given as calories per second per square centimeter per unit of temperature gradient; hence

$$[k] = \frac{L^2 T^{-2} M}{T L^2 (H L^{-1})} = L T^{-3} M H^{-1}.$$

The rate r of heat transfer is given in calories per second; hence

$$[r] = L^2 T^{-2} M T^{-1}.$$

Thus we have the dimensional matrix:

$$\begin{array}{c|ccccc} & L & T & M & H \\ \hline d & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & -1 & 0 & 0 \\ k & 1 & -3 & 1 & -1 \\ \vartheta & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline c & -1 & -2 & 1 & -4 \\ r & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline \\ \end{array} \right\} P \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \hline \\ \end{array} \right\} Q.$$

This matrix has the rank 4; for the 4×4 matrix P has $\det P = -1$. Hence there are $6 - 4 = 2$ dimensionless products. Since

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \star, \quad Q P^{-1} = \begin{pmatrix} -1, & -1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = (Q P^{-1}, I_2) = \begin{pmatrix} 1, & 1, & -1, & 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & -1, & -1, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

* To find P^{-1} partition P into four 2×2 matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$; then since $B = 0$ we have $P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1} C A^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

they are

$$\pi_1 = d v k^{-1} c, \quad \pi_2 = d^{-1} k^{-1} \vartheta^{-1} r.$$

Thus a relation between the six variables may be put in the form $\pi_2 = f(\pi_1)$, or

$$(i) \quad r = f(\pi_1) d k \vartheta.$$

Solution 2. Units of length, time and mass (L, T, M) taken as fundamental.

If the temperature of a body is regarded as a measure of the kinetic energy of its molecules, we have $H = L^2 T^{-2} M$. Our dimensional matrix is now

$$\begin{array}{c|ccc} & L & T & M \\ \hline d & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ \vartheta & 2 & -2 & 1 \\ \hline c & -3 & 0 & 0 \\ v & 1 & -1 & 0 \\ r & 2 & -3 & 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} P \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} Q.$$

The rank is 3 since the 3×3 matrix P has $\det P = -1$. The Pi Theorem now gives $6 - 3 = 3$ dimensionless products. Since

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = (-Q P^{-1}, I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

they are

$$\pi_1 = d^3 c, \quad \pi_2 = d^{-2} k^{-1} v, \quad \pi_3 = d^{-1} k^{-1} \vartheta^{-1} r.$$

A relation between the six variables may be put in the form $\pi_3 = g(\pi_1, \pi_2)$, or

$$(ii) \quad r = g(\pi_1, \pi_2) d k \vartheta.$$

Since functions of two variables form a much wider class than functions of one variable, the added knowledge that $H = L^2 T^{-2} M$ given by the molecular theory of heat seems, as Lord RAYLEIGH said, to "put us in a worse position than before" [12] when the desired relation was given by (i). The explanation of this apparent paradox is given in § 3; for solution 2 with three units admits a larger class of isobaric functions than solution 1 with four units.

The paradox may be explained also as follows [13]. The assumption that L, T, M, H are fundamental units implies that

$$X = x L^a T^b M^c H^d$$

is dimensionless when and only when

$$(iii) \quad a = b = c = d = 0.$$

In solution 2 the assumption that L, T, M are fundamental units implies that

$$X = x L^a T^b M^c (L^2 T^{-2} M)^d$$

is dimensionless when and only when

$$(iv) \quad a = -2d, \quad b = 2d, \quad c = -d.$$

Now conditions (iv) are included in (iii) when $d = 0$, and are therefore less restrictive than conditions (iii). Thus the Pi Theorem gives formula (i) under one theory, formula (ii) under another; only experiment can decide which is correct.

6. Recent Developments

In 1914 BUCKINGHAM [1] proved the Pi Theorem for functions capable of being expanded in Maclaurin series. This restriction is not imposed in BRIDGMAN's proof, but the functions are assumed to be differentiable and the proof depends on the solution of a linear, partial differential equation of the first order [3]. The problem, however, is strictly algebraic and differentiability is not a relevant requirement. Purely algebraic proofs have been given by LANGHAAR [4] and BIRKHOFF [7]; but neither author gives the theorem in the specific form stated in § 4, where the precise function of the dimensionless arguments is given as well as their exponential matrix. BIRKHOFF's argument is difficult to follow in view of its extreme concision and a variety of misprints; moreover his definition of "unit-free" functions f as those for which "the locus defined by $f=0$ is invariant under all transformations [of units]" is not well adapted to a sharp proof.

S. DROBOT in his recent paper *On the Foundations of Dimensional Analysis* [5] aims "to construct the Dimensional Analysis by means of quite simple algebraic methods, namely using the theory of linear space". In part II of his paper the usual postulates for a linear (or vector) space Σ over the field of real numbers are given. The operations involved are the addition of elements of Σ and their multiplication by numbers. He then proves two theorems on the form of functions whose arguments, as well as the function itself, are elements of Σ . In part III this entire theory is carried over bodily to a "multiplicative form of linear space" Π whose postulates are precise analogues of those for Σ . The elements of Π are called "dimensional quantities", and the positive numbers are regarded as a subclass of Π . The operations involved are the multiplication of elements in Π and the raising them to real powers. If A_1, A_2, \dots, A_m are "dimensionally independent" elements (*i.e.* a system of units) any element P_j of Π can be uniquely represented in the form

$$(i) \quad P_j = \pi_j A_1^{p_{j1}} \dots A_m^{p_{jm}}$$

where $\pi_j, p_{j1}, \dots, p_{jm}$ are real numbers and π_j is positive. The two theorems of part II are now combined and stated in the following multiplicative form appropriate to an n -dimensional space Π :

Let $\Phi(A_1, \dots, A_m; P_1, \dots, P_r)$ be a dimensionally invariant and homogeneous function. If A_1, A_2, \dots, A_m ($m \leq n$) are dimensionally independent and the P_j have the form (i), then

$$(ii) \quad \Phi(A_1, \dots, A_m; P_1, \dots, P_r) = \varphi A_1^{t_1} \dots A_m^{t_m},$$

where the positive coefficient φ does not depend on the A 's, and the real exponents f_j depend neither on the A 's nor on π_1, \dots, π_r .

This theorem, which the author regards as basic, gives the form of a function element of Π . It states what φ does not depend upon; and later the author casually remarks that φ does depend upon the positive coefficients π_1, \dots, π_r and the exponents p_{jk} of the elements P_1, \dots, P_r that appear in Φ . But since the nature of this dependence on p_{jk} is never stated, this theorem is no substitute for the Pi Theorem. Indeed in the examples cited, the coefficient φ is a function of the r dimensionless quantities $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ which appear in the P 's. Since there are $m+r$ arguments in Φ and m units (the A 's), this suggests the Pi Theorem in the form first given by BUCKINGHAM in which the rank of the dimensional matrix is not considered.

DROBOT concludes his paper with a number of illuminating examples. One of these disposes very clearly of Lord RAYLEIGH's paradox; and others deal with the theory of quality control by sampling and particular solutions of partial differential equations.

References

- [1] BUCKINGHAM, E.: On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations. *Phys. Rev.* **4**, No. 4, 345 (1914).
- [2] BRIDGMAN, P. W.: Dimensional Analysis, p. 43. Yale Univ. Press 1922. — LANGHAAR, H. L.: Dimensional Analysis and Theory of Models, chap. 4. Wiley 1951.
- [3] BRIDGMAN, P. W.: Op. cit., p. 38.
- [4] LANGHAAR, H. L.: Op. cit., p. 56.
- [5] DROBOT, S.: On the Foundations of Dimensional Analysis. *Studia Mathematica* **14**, fasc. 1, 84—99 (1953).
- [6] DROBOT, S.: loc. cit., part III.
- [7] BIRKHOFF, GARRETT: Hydrodynamics, Chap. 3. Princeton Univ. Press 1950.
- [8] DROBOT, S.: loc. cit.
- [9] BRIDGMAN, P. W.: Op. cit., p. 10—11. — ESNAUT-PELTERIE, R.: Op. cit., Ex. 8, p. 217. — DROBOT, S.: loc. cit., part vii.
- [10] ESNAUT-PELTERIE, R.: Dimensional Analysis. Lausanne 1950.
- [11] BRIDGMAN, P. W.: Op. cit., p. 9—11. — DROBOT, S.: loc. cit., part vii. — Lord RAYLEIGH: *Nature* **15**, 66 (1915).
- [12] Lord RAYLEIGH: *Nature* **15**, 644 (1915).
- [13] DROBOT, S.: loc. cit., part vii.

University of Cincinnati

(Received April 13, 1957)

Über ein System partieller Differentialgleichungen

ERWIN KREYSZIG

Vorgelegt von S. BERGMAN

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse von Systemen partieller Differentialgleichungen

$$(1.1) \quad U_{x_\alpha x_\alpha} + U_{y_\alpha y_\alpha} + \varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) U = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

untersucht. Hierbei sind φ_1 und φ_2 nicht identisch verschwindende analytische Funktionen der jeweiligen (zunächst als reell angenommenen) Variablen. Die genannte, nachstehend definierte Klasse besitzt die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Für jedes System (1.1) aus dieser Klasse existiert eine unendliche Menge unabhängiger Partikulärlösungen, deren jede gewöhnliche lineare Differentialgleichungen (mit algebraischen Koeffizienten) in jeder der vier in (1.1) vorkommenden Variablen befriedigt. Die Ordnung dieser Differentialgleichungen hängt nur von φ_1 bzw. φ_2 ab, ist also für jede der genannten Partikulärlösungen dieselbe. Die Menge dieser Lösungen bildet eine vollständige Approximationsbasis (vgl. Abschnitt 5). Auf diese Weise kann die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen für die Untersuchung von Lösungen partieller Differentialgleichungen herangezogen werden.

2. Formale Vorbereitungen

Indem wir auch komplexe Werte der vier Variablen zulassen, können wir die Funktionen φ_1 und φ_2 analytisch ins Komplexe fortsetzen. Wir führen nun die Variablen

$$z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha, \quad z_\alpha^* = x_\alpha - i y_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

ein, die für komplexe Werte der ursprünglichen Variablen voneinander unabhängig sind. Unter Benutzung von

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_\alpha^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2,$$

geht (1.1) in

$$(2.1) \quad u_{z_1 z_1^*} + F_1(z_1, z_1^*) u = 0, \quad u_{z_2 z_2^*} + F_2(z_2, z_2^*) u = 0$$

über. Hierbei ist

$$u(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = U \left(\frac{z_1 + z_1^*}{2}, \frac{z_1 - z_1^*}{2i}, \frac{z_2 + z_2^*}{2}, \frac{z_2 - z_2^*}{2i} \right)$$

und

$$F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = \frac{1}{4} \varphi_\alpha \left(\frac{z_\alpha + z_\alpha^*}{2}, \frac{z_\alpha - z_\alpha^*}{2i} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Wir setzen fortan stets voraus, daß die Funktion $F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*)$ in einem Gebiet $B_{z_\alpha} \times B_{z_\alpha^*}$ regulär ist, das den Nullpunkt $(z_\alpha, z_\alpha^*) = (0, 0)$ enthält.

Es sei angemerkt, daß (2.1) zwei Systemen von je zwei partiellen Differentialgleichungen für den Real- und den Imaginärteil der komplexen Lösung u äquivalent ist. Diese Gleichungen haben genau dann paarweise dieselbe Form, wenn die Funktionen F_α für reelle Argumentwerte reell sind.

Im folgenden können wir die zu betrachtenden Systeme in der Form (2.1) zugrunde legen.

3. Integraldarstellung der Lösungen durch Bergman-Operatoren

Es existieren beliebig viele Operatoren, die analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen in Lösungen partieller Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen transformieren. Bergman-Operatoren [1]^{*} besitzen die Eigenschaft, daß sich die Zuordnung der genannten Lösungen zu den analytischen Funktionen, die zunächst lokal gegeben ist, ins Große fortsetzen läßt. Außerdem übertragen sich eine Reihe grundlegender Eigenschaften der analytischen Funktionen auf die Lösungen. Deshalb kann man aus bekannten Ergebnissen der Funktionentheorie entsprechende Sätze über partielle Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten gewinnen. BERGMAN und SCHIFFER [2], [3] haben diese Theorie vor kurzem auf Systeme partieller Differentialgleichungen übertragen. Die Verfasser bewiesen, daß sich jede im Nullpunkt reguläre Lösung von (2.1) in der Form

$$(3.1) \quad u(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = P(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 E_1(z_1, z_1^*, t_1) E_2(z_2, z_2^*, t_2) \times \\ \times [f_1 \{\frac{1}{2} z_1 (1 - t_1^2), \frac{1}{2} z_2 (1 - t_2^2)\} + \\ + f_2 \{\frac{1}{2} z_1 (1 - t_1^2), \frac{1}{2} z_2^* (1 - t_2^2)\}] (1 - t_1^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - t_2^2)^{-\frac{1}{2}} dt_1 dt_2$$

darstellen läßt. Hierbei sind die „Zugeordneten“ f_1 und f_2 der Lösung u im Nullpunkt reguläre analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die „Erzeugenden“ E_1 und E_2 des Operators P sind unabhängig von der Wahl der Zugeordneten. E_1 hängt nur von F_1 und E_2 nur von F_2 ab, vgl. (2.1). Die Darstellung (3.1) gilt in dem Gebiet $B = B_{z_1} \times B_{z_1^*} \times B_{z_2} \times B_{z_2^*}$, wobei die Faktoren dieses Produktes die im vorigen Abschnitt angegebene Bedeutung haben.

4. Die Klasse \mathfrak{E}

Wir untersuchen eine Klasse von Systemen (2.1), die wir als die „Klasse \mathfrak{E} “ bezeichnen und folgendermaßen definieren:

Ein System partieller Differentialgleichungen (2.1) gehört der Klasse \mathfrak{E} an, wenn man in der Darstellung (3.1) der zugehörigen Lösungen „Erzeugende vom Exponentielltyp“

$$(4.1) \quad E_\alpha = \exp Q_\alpha, \quad Q_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*, t_\alpha) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} q_{\alpha\mu}(z_\alpha, z_\alpha^*) t_\alpha^\mu, \quad \alpha = 1, 2,$$

wählen kann.

* Siehe Literaturverzeichnis am Schluß der vorliegenden Arbeit.

Die Systeme dieser Klasse lassen sich relativ einfach überblicken. Es ergeben sich nämlich die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zugehörigkeit eines Systems (2.1) zur Klasse \mathfrak{E} :

Satz 1. Ein System partieller Differentialgleichungen (2.1) gehört genau dann der Klasse \mathfrak{E} an, wenn sich dessen Koeffizienten in der Form

$$(4.2) \quad (a) \quad F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = -\frac{q_{\alpha 1}}{2z_\alpha} \frac{\partial q_{\alpha 1}}{\partial z_\alpha^*} \quad \text{oder} \quad (b) \quad F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = -\frac{1}{2z_\alpha} \frac{\partial q_{\alpha 2}}{\partial z_\alpha^*}, \quad \alpha = 1, 2,$$

darstellen lassen[★]; hierbei ist

$$(4.3) \quad (a) \quad q_{\alpha 1}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \sum_{\lambda=0}^{\lfloor \frac{1}{2}(m_\alpha-1) \rfloor} a_{\alpha \lambda} z^{\lambda + \frac{1}{2}}, \quad (b) \quad q_{\alpha 2}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \sum_{\lambda=1}^{\lfloor \frac{1}{2}m_\alpha \rfloor} b_{\alpha \lambda} z_\alpha^\lambda, \quad \alpha = 1, 2;$$

die beiden Koeffizienten $a_{\alpha 0}$ und $b_{\alpha 1}$ können analytische Funktionen von z_α^* sein, während die übrigen Koeffizienten konstant sind.

Beweis. Wie aus [2, S. 85] hervorgeht, wurde (3.1) durch Verallgemeinerung eines Bergman-Operators gewonnen, mit dessen Hilfe sich die Lösungen einer einzelnen partiellen Differentialgleichung

$$u_{zz^*} + F(z, z^*) u = 0$$

in der Form

$$(4.4) \quad u(z, z^*) = \int_{-1}^1 E(z, z^*, t) f\{\frac{1}{2}z(1-t^2)\} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

darstellen lassen, vgl. [1]. Es gilt also für die Lösungen jeder einzelnen der beiden Differentialgleichungen (2.1) eine derartige Darstellung, und man kann die in diesen Darstellungen vorkommenden Erzeugenden E als Erzeugende E_1 und E_2 in (3.1) verwenden, vgl. [2]. Demnach sind E_1 und E_2 so zu bestimmen, daß (4.4) mit E_1 bzw. E_2 als Erzeugender eine Lösung der ersten bzw. der zweiten Gleichung (2.1) darstellt. Nun sollen E_1 und E_2 nach Definition der Klasse \mathfrak{E} die Form (4.1) besitzen. Diese Wahl der Erzeugenden zieht Bedingungen über die Form der Funktionen F_1 und F_2 in (2.1) nach sich, und zugleich ergeben sich Beziehungen zwischen den zunächst noch willkürlichen Koeffizienten $q_{\alpha \mu}(z_\alpha, z_\alpha^*)$ in (4.1) und den Funktionen F_1 und F_2 . Durch Einsetzen der Darstellung (4.4) mit $E=E_1$ in die erste und mit $E=E_2$ in die zweite der Differentialgleichungen (2.1) sieht man, daß E_α , $\alpha=1, 2$, der partiellen Differentialgleichung

$$(4.5) \quad (1-t_\alpha^2) \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial z_\alpha^* \partial t_\alpha} - \frac{1}{t_\alpha} \frac{\partial E_\alpha}{\partial z_\alpha^*} + 2z_\alpha t_\alpha \left(\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial z_\alpha \partial z_\alpha^*} + F_\alpha E_\alpha \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

genügt. Man führt nun den Beweis auf einem kürzlich angegebenen Wege weiter, vgl. KREYSZIG [4]: Jede in (4.5) auftretende Ableitung von E_α läßt sich als Produkt aus E_α und einer Funktion darstellen, die Potenzen von t_α und die Funktionen $q_{\alpha \mu}$ und deren Ableitung enthält, vgl. (4.1). Läßt man den sich so ergebenden gemeinsamen Faktor E_α weg, dann bleibt auf der linken Seite von (4.5) ein Polynom in t_α übrig. Die erhaltene Gleichung gilt identisch in t_α . Durch

[★] Dies ist so zu verstehen: F_1 kann z.B. die Form (b) und F_2 z.B. die Form (a) [oder auch die Form (b)] haben, so daß es insgesamt 4 Möglichkeiten gibt.

Nullsetzen des Koeffizienten einer jeden vorkommenden Potenz von t_α erhält man ein System von $m_\alpha + 3$ linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, das man nach der in [4, S. 915–919] angegebenen Methode lösen kann. Auf diesem Wege ergibt sich die Aussage des vorliegenden Satzes und zugleich der

Zusatz. *Die übrigen, in Satz 1 noch nicht genannten Koeffizienten $q_{\alpha\mu}(z_\alpha, z_\alpha^*)$ der Darstellung (4.1) haben die Form*

$$(4.6) \quad q_0 = c_\alpha - \sum_{\lambda=1}^{\lfloor \frac{1}{2}m_\alpha \rfloor} \frac{b_{\lambda\alpha}}{\lambda} z_\alpha^\lambda, \quad c_\alpha = \text{konst.}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$q_{\alpha, 2\mu+1} = (-2)^\mu (3 \cdot 5 \dots (2\mu+1))^{-1} \sum_{\lambda=\mu}^{\lfloor \frac{1}{2}(m_\alpha-1) \rfloor} \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-\mu+1) a_{\alpha\lambda} z_\alpha^{\lambda+\frac{1}{2}}$$

(wenn (4.2a) gilt),

$$q_{\alpha, 2\mu} = 0 \quad (\text{wenn (4.2b) gilt}), \quad \mu = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{1}{2}(m_\alpha-1) \rfloor, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$q_{\alpha, 2\mu} = (-2)^{\mu+1} (2 \cdot 4 \dots 2\mu)^{-1} \sum_{\lambda=\mu}^{\lfloor \frac{1}{2}m_\alpha \rfloor} (\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-\mu+1) b_{\alpha\lambda} z_\alpha^\lambda,$$

$$\mu = 2, 3, \dots, \lfloor \frac{1}{2}m_\alpha \rfloor, \quad \alpha = 1, 2.$$

Damit ist die Klasse \mathfrak{E} vollständig charakterisiert, und man kann für jedes System, das dieser Klasse angehört, zugehörige Erzeugende E_1 und E_2 sofort angeben. Das System

$$(4.7) \quad \frac{1}{4}(U_{x_\alpha x_\alpha} + U_{y_\alpha y_\alpha} + U) = u_{z_\alpha z_\alpha^*} + \frac{1}{4}u = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

ist ein Beispiel eines Systems der Klasse \mathfrak{E} , und die einfachsten Erzeugenden sind

$$(4.8) \quad E_\alpha = \exp(i \sqrt{z_\alpha z_\alpha^*} t_\alpha), \quad \alpha = 1, 2,$$

wie aus Satz 1 folgt.

5. Lösungen von Systemen der Klasse \mathfrak{E} , die gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen

Wählen wir in (3.1) die Erzeugenden (4.1) und die Zugeordneten

$$(5.1) \quad f_1(z_1, z_2) = z_1^\beta z_2^\gamma, \quad f_2(z_1, z_2^*) = z_1^\sigma z_2^*{}^\tau, \quad \beta, \gamma, \sigma, \tau = 0, 1, \dots,$$

so erhalten wir eine unendliche Menge M unabhängiger Partikulärlösungen der Systeme (2.1) der Klasse \mathfrak{E} . Wir wollen zeigen, daß jede dieser Lösungen außer (2.1) vier gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigt.

Zuvor vermerken wir die wichtige Tatsache, daß die Menge M in folgendem Sinne eine *vollständige Approximationsbasis* bildet: Jede Lösung eines der betrachteten Systeme (2.1), die in einem konvexen (reell-vierdimensionalen) Gebiet $B_{z_1 z_2}$, das den Nullpunkt enthält, regulär ist, läßt sich in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $B_{z_1 z_2}$ durch eine endliche Linearkombination von Elementen aus M gleichmäßig approximieren. Dies folgt aus den Untersuchungen von BERGMAN und SCHIFFER [2] in Verbindung mit dem Approximationssatz von HAMMERSTEIN [5] für analytische Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Um gewöhnliche Differentialgleichungen zu gewinnen, die durch die Lösungen aus M befriedigt werden, haben wir diese Lösungen in gewissen (reell-zweidimensionalen) Ebenen des (reell-achtdimensionalen) $x_1 y_1 x_2 y_2$ -Raumes zu betrachten, vgl. (1.4). Wir wählen die vier Scharen derartiger Ebenen, die sich ergeben, indem man jeweils 3 der 4 genannten komplexen Variablen konstant annimmt. Dann haben wir den Vorteil, daß die Lösungen analytische Funktionen der nicht konstant angenommenen Variablen sind. Es gilt

Satz 2. *Jede Lösung $U(x_1, y_1, x_2, y_2) = u(x_1 + iy_1, x_1 - iy_1, x_2 + iy_2, x_2 - iy_2)$ eines Systems (2.1) der Klasse \mathfrak{E} mit einer Zugeordneten von der Form (5.1) genügt vier gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$(5.2) \quad \sum_{\alpha=0}^{k_j} g_{j\alpha}(v_j) \frac{\partial^\alpha U}{\partial v_j^\alpha} = 0, \quad g_{jk_j} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Hierbei ist $v_1 = x_1$, $v_2 = y_1$, $v_3 = x_2$, $v_4 = y_2$, und die jeweils nicht angegebenen 3 der 4 Variablen sind konstant; die Koeffizienten hängen von der Wahl dieser konstanten Werte ab und sind rationale Funktionen von $g_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \dots, m_2$, $\alpha = 1, 2$, und den Ableitungen dieser Funktionen, vgl. (4.1). Die Ordnungen der Gleichungen sind unabhängig von dem Wert der Exponenten β, γ, σ und τ in (5.1); es gilt

$$(5.3) \quad k_j \leq 2(m_1 + 1), \quad j = 1, 2, \quad \text{bzw.} \quad k_j \leq 2(m_2 + 1), \quad j = 3, 4.$$

Beweis. Infolge der Form der Erzeugenden (4.1) und der Zugeordneten (5.1) hat (3.1) die Gestalt

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 = u_{11} u_{12}, \quad u_2 = u_{21} u_{22}$$

mit

$$u_{\lambda\alpha}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \int_{-1}^1 (\exp Q_\alpha) f_{\lambda\alpha} dt_\alpha, \quad \lambda, \alpha = 1, 2,$$

wobei

$$f_{11}(z_1, t_1) = \left(\frac{z_1}{2}\right)^\beta (1 - t_1^2)^{\beta - \frac{1}{2}}, \quad f_{12}(z_2, t_2) = \left(\frac{z_2}{2}\right)^\gamma (1 - t_2^2)^{\gamma - \frac{1}{2}} \\ f_{21}(z_1, t_1) = \left(\frac{z_1}{2}\right)^\sigma (1 - t_1^2)^{\sigma - \frac{1}{2}}, \quad f_{22}(z_2^*, t_2) = \left(\frac{z_2^*}{2}\right)^\tau (1 - t_2^2)^{\tau - \frac{1}{2}}$$

ist. Es genügt, eine der vier Differentialgleichungen (5.2), etwa die dem Wert $j = 1$ entsprechende, zu betrachten; für die anderen verläuft der Beweis analog. Die Funktion $u_{11}(z_1, z_1^*) = u_{11}(x_1 + iy_1, x_1 - iy_1) = U_{11}(x_1, y_1)$ befriedigt eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$(5.4) \quad L_1(u_{11}) = \tilde{L}_1(U_{11}) = \sum_{\varrho=0}^{r_1} h_\varrho(x_1, y_1^0) \frac{\partial^\varrho U_{11}}{\partial x_1^\varrho} = 0, \quad h_{r_1} = 1, \quad y_1 = y_1^0 = \text{konst.}$$

von der Ordnung $r_1 \leq m_1 + 1$; die Koeffizienten dieser Gleichung sind rationale Funktionen von $g_{1\mu}$, $\mu = 0, 1, \dots, m_1$, und den Ableitungen dieser Funktionen, wie aus [6, S. 808], Satz 2 folgt. Da in (5.2), ($j = 1$), mit x_2 und y_2 auch z_2 und z_2^* konstant sind, so ist auch $u_1 = u_{11} u_{12}$ eine Lösung von (5.4). Entsprechend genügt $u_{21}(z_1, z_1^*) = U_{21}(x_1, y_1)$ einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung

$$(5.5) \quad L_2(u_{21}) = \tilde{L}_2(U_{21}) = \sum_{\varrho=0}^{r_2} H_\varrho(x_1, y_1^0) \frac{\partial^\varrho U_{21}}{\partial x_1^\varrho} = 0, \quad H_{r_2} = 1, \quad y_1 = y_1^0 = \text{konst.}$$

von der Ordnung $r_2 \leq m_1 + 1$, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen von $q_{1\mu}$ und den Ableitungen dieser Funktionen sind. Dasselbe gilt demnach auch für $u_2 = u_{21}u_{22}$. So haben wir insgesamt drei Gleichungen,

$$(5.6) \quad u = u_1 + u_2, \quad L_1(u_1) = 0, \quad L_2(u_2) = 0,$$

aus denen wir durch Elimination von u_1 und u_2 und den Ableitungen dieser Funktionen eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für u von der Form (5.2) gewinnen können. Da hierbei jede der Gleichungen (5.4) höchstens $(2m_1 + 2)$ mal zu differenzieren ist, so ergibt sich die obengenannte Schranke für k_1 , vgl. (5.3). Entsprechend beweist man die Existenz der übrigen Gleichungen (5.2). Man beachte dabei, daß $Q_2(z_2, z_2^*, t_2)$ ein Polynom in t_2 vom Grade m_2 ist; deshalb sind die Schranken für k_3 und k_4 von denen für k_1 und k_2 verschieden.

Zum Beispiel ergeben sich für das System (4.7) bei Wahl der Erzeugenden (4.8) und der Zugeordneten (5.1) die Lösungen $u = u_1 + u_2$ mit

$$\begin{aligned} u_1 &= \pi \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z_1}{z_1^*}\right)^{\frac{1}{2}\beta} \left(\frac{z_2}{z_2^*}\right)^{\frac{1}{2}\gamma} J_\beta(\sqrt{z_1 z_1^*}) J_\gamma(\sqrt{z_2 z_2^*}), \\ u_2 &= \pi \Gamma\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\tau + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z_1}{z_1^*}\right)^{\frac{1}{2}\sigma} \left(\frac{z_2^*}{z_2}\right)^{\frac{1}{2}\tau} J_\sigma(|z_1 z_1^*|) J_\tau(|z_2 z_2^*|). \end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus der bekannten Darstellung

$$J_n(r) = \frac{r^n}{2^n \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \exp(i r \cos \varphi) (\sin \varphi)^{2n} d\varphi, \quad \Re(n) > \frac{1}{2},$$

der Bessel-Funktionen (vgl. NIELSEN [7, S. 51]), indem man $\cos \varphi = t_1$ bzw. $\cos \varphi = t_2$ setzt. Die Differentialgleichungen (5.4) und (5.5) haben im vorliegenden Fall die Form

$$L_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha'' + b_{\alpha 1} u_\alpha' + b_{\alpha 0} u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

mit

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha 1} &= \left(x_1 - \frac{y_1^2}{x_1} + 2i c_\alpha y_1 \right) / (x_1^2 + y_1^2) \\ b_{\alpha 0} &= \left(x_1^2 - c_\alpha^2 - i c_\alpha \frac{y_1}{x_1} \right) / (x_1^2 + y_1^2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c_1 &= \beta, \quad c_2 = \sigma, \quad \alpha = 1, 2, \\ \end{aligned}$$

wobei Striche die Ableitungen nach x_1 kennzeichnen. Hieraus gewinnt man für u eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung in x_1 , die sich in der Form

$$\left| \begin{array}{ccccc} L_1(u) & c & d & 0 & 0 \\ L'_1(u) & c' & c + d' & d & 0 \\ L''_1(u) & c'' & 2c' + d'' & c + 2d' & d \\ 0 & b_{20} & b_{21} & 1 & 0 \\ 0 & b'_{20} & b_{20} + b'_{21} & b_{21} & 1 \end{array} \right| = 0$$

darstellen läßt, wobei $c = b_{20} - b_{10}$ und $d = b_{21} - b_{11}$ ist.

6. Folgerungen

Wir schließen mit einigen Bemerkungen über Folgerungen aus den gewonnenen Ergebnissen.

(1.) Außer der bisher betrachteten Menge M von Lösungen der Systeme (2.1) der Klasse \mathfrak{E} existiert eine weitere Menge unabhängiger Lösungen mit ähnlichen Eigenschaften. Diese Lösungen entsprechen den meromorphen Zugeordneten

$$(6.1) \quad f_1(z_1, z_2) = (z_1 - a_\alpha)^{-\alpha} (z_2 - b_\lambda)^{-\lambda}, \quad f_2(z_1, z_2^*) = (z_1 - c_\mu)^{-\mu} (z_2^* - d_\nu)^{-\nu};$$

$$\alpha, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots,$$

wobei $a_\alpha, b_\lambda, c_\mu$ und d_ν beliebige, von null verschiedene Konstanten bedeuten. Jede dieser Lösungen befriedigt ebenfalls gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form (5.2), deren Koeffizienten rationale Funktionen von $q_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \dots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, und den Ableitungen dieser Funktionen sind. Die Ordnung der (5.2), $j = 1, 2$ bzw. $j = 3, 4$ entsprechenden Gleichung beträgt höchstens $2(m_1 + 3)$ bzw. $2(m_2 + 3)$. Dies beweist man ähnlich wie den Satz 2 der vorliegenden Arbeit unter Heranziehung des Satzes 1 in [8]. Durch Kombination dieses Resultates mit Satz 2 ergibt sich der

Zusatz zu Satz 2. *Lösungen von Systemen (2.1) der Klasse \mathfrak{E} , deren Zugeordnete beliebige im Nullpunkt reguläre rationale Funktionen sind, befriedigen gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form (5.2).*

(2.) Die in (6) angegebene Charakterisierung der Singularitäten einer Lösung einer einzelnen partiellen Differentialgleichung mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen lässt sich auch auf den Fall von Systemen (2.1) der Klasse \mathfrak{E} übertragen. Ohne hierauf im Augenblick näher einzugehen, erwähnen wir die folgende bemerkenswerte Tatsache: Die Koeffizienten der gewöhnlichen Differentialgleichungen (5.2) sind im allgemeinen Fall *rationale Funktionen der $q_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \dots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, und ihrer Ableitungen*. Sind nun F_1 und F_2 *rationale Funktionen*, so sind die Koeffizienten von (5.2) sogar *rationale Funktionen der jeweiligen Variablen*; dies beweist man unter Benutzung von Satz 1 und Satz 2. Auf Grund des vorstehenden Zusatzes erhält man demnach den

Satz 3. *Für Systeme (2.1) der Klasse \mathfrak{E} mit rationalen Koeffizienten F_1 und F_2 gilt: Die Singularitäten der Lösungen mit rationalen Zugeordneten f_1 und f_2 [vgl. (3.1)] liegen auf (reell-sechsdimensionalen) algebraischen Mannigfaltigkeiten des $z_1 z_1^* z_2 z_2^*$ -Raumes.*

(3.) Befriedigt eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung, so kann man diese Lösung mit Hilfe der letzteren auch außerhalb des Gültigkeitsbereiches ihrer Darstellung durch einen Bergman-Operator untersuchen. Dies hat BERGMAN [9] für den Fall einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung erstmals gezeigt. Es ist zu erwarten, daß sich diese Bergmansche Theorie mit Hilfe der vorstehenden Ergebnisse auf Systeme partieller Differentialgleichungen übertragen läßt.

Literatur

- [1] BERGMAN, S.: Linear operators in the theory of partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 130–155 (1943).
- [2] BERGMAN, S., & M. M. SCHIFFER: Properties of solutions of a system of partial differential equations. Studies in Mathematics and Mechanics, presented to Richard von Mises, 1954, 79–87.
- [3] BERGMAN, S.: Bounds for solutions of a system of partial differential equations. Journ. rat. Mech. and Analysis **5**, 993–1002 (1956).
- [4] KREYSZIG, E.: On a class of partial differential equations. Journ. rat. Mech. and Analysis **4**, 907–923 (1955).
- [5] HAMMERSTEIN, A.: Über die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlichen durch Polynome. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. **1933**, 259–266.
- [6] KREYSZIG, E.: On certain partial differential equations and their singularities. Journ. rat. Mech. and Analysis **5**, 805–820 (1956).
- [7] NIELSEN, N.: Handbuch der Zylinderfunktionen. Leipzig 1905.
- [8] KREYSZIG, E.: On some relations between partial and ordinary differential equations. Proc. Canad. Math. Soc. (im Druck).
- [9] BERGMAN, S.: Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. Recueil Math., N. S. **2**, 1169–1197 (1937).

Ohio State University, Columbus, Ohio

(Eingegangen am 16. März 1957)

Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat

PHAM MAU QUAN

Mémoire transmis par A. LICHNEROWICZ

Sommaire

	Page
Introduction	54
I. Inductions électromagnétiques. Intégration des équations de MAXWELL	
1. Les équations de MAXWELL dans l'espace-temps \mathfrak{B}_4	56
2. Expression des $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$	58
3. L'intégration des équations de MAXWELL-EINSTEIN	58
4. Les variétés caractéristiques \mathfrak{B}_3^M	61
II. Étude des caractéristiques	
5. Définition d'une métrique associée	63
6. Étude des bicaractéristiques	64
7. Les équations de l'électromagnétisme dans la métrique associée	66
III. Mouvement permanent d'un fluide parfait chargé	
8. Espace-temps stationnaire dans un domaine	68
9. Mouvement permanent d'un fluide parfait chargé	69
10. Isométrie induite dans \mathfrak{B}_4	71
IV. Étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace	
11. Un problème du calcul des variations	72
12. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne \mathfrak{B}_4	74
13. Le principe de FERMAT	77
14. Interprétation du signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$	78
15. Espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses	79

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des inductions électromagnétiques en relativité générale. On y trouve exposée une démonstration du principe de FERMAT basée sur les propriétés des caractéristiques des équations de MAXWELL.

Les champs et inductions électriques, magnétiques sont introduits comme l'ont fait GORDON, WEYL, LICHNEROWICZ, à l'aide de deux champs de tenseurs antisymétriques d'ordre 2: le tenseur champ électrique — induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et le tenseur induction électrique — champ magnétique $G_{\alpha\beta}$. Des équations de liaison expriment les relations linéaires entre inductions et champs. C'est

l'ensemble des deux tenseurs $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ qui constitue le champ électromagnétique. Le schéma énergétique où il intervient est un schéma «fluide chargé conducteur» dont l'étude a été faite antérieurement* et dont on rappelle les résultats essentiels sur l'intégration des équations du champ.

En présence d'inductions, les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL ne sont pas identiques aux variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN. On sait que ces dernières sont tangentes en chacun de leurs points aux cônes élémentaires \mathcal{C}_x de l'espace-temps. Les cônes caractéristiques $\bar{\mathcal{C}}_x$ pour les équations de MAXWELL sont intérieurs aux cônes élémentaires. Les variétés caractéristiques tangentes aux cônes $\bar{\mathcal{C}}_x$ sont orientées dans le temps et les bicaractéristiques sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique associée**.

$$d\bar{s}^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right) u_\alpha u_\beta \right) dx^\alpha dx^\beta$$

où u^α désigne le vecteur vitesse unitaire d'univers et les scalaires ε, μ le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique en chaque point du milieu considéré.

Or les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques et les bicaractéristiques, celui de rayons électromagnétiques correspondants. On est conduit à introduire naturellement la variété riemannienne \mathfrak{B}_4 définie par la variété différentiable portant l'espace-temps et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$.

Les équations de MAXWELL peuvent s'exprimer directement dans cette variété où elles affectent une forme simple symétrique de celles de la théorie électrodynamique de LORENTZ. Les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de \mathfrak{B}_4 . L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace fournit l'énoncé du principe de FERMAT.

Pour faire cette étude, nous avons commencé par généraliser au cas du fluide parfait chargé conducteur la notion de mouvements permanents liée à l'existence pour l'espace-temps \mathfrak{B}_4 d'un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires orientées dans le temps et ne laissant invariant aucun point de \mathfrak{B}_4 ***. Si le mouvement du fluide considéré est permanent, il est défini dans la variété \mathfrak{B}_4 un groupe d'isométries induites par le groupe de l'espace-temps. Nous sommes dans un cas où la «méthode de descente» de LICHNEROWICZ**** s'applique. En projetant les géodésiques de longueur nulle de \mathfrak{B}_4 sur la variété quotient de \mathfrak{B}_4 par la relation d'équivalence définie par son groupe d'isométries, nous obtenons un théorème qui généralise le principe de FERMAT en relativité. Ce théorème est valable pour un milieu en mouvement permanent quelconque. En particulier dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, il fournit comme conséquence une démonstration de la formule relativiste de la composition des vitesses.

* Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé [Jour. Rational Mechanics and Analysis 5, No. 3, 473–583 (1956)].

** GORDON a trouvé cette métrique par voie algébrique.

*** LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, chap. IV, III, pp. 83–90. Masson 1955.

**** Ibid., Livre II, chap. 1^{er}.

Notations employées

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} : \text{ dérivées partielles}$$

$$\nabla_\alpha : \text{ dérivée covariante}$$

α, β, \dots , tout indice grec = 0, 1, 2, 3.

i, j, \dots , tout indice latin = 1, 2, 3.

I. Inductions électromagnétiques.

Intégration des équations de MAXWELL

1. Les équations de Maxwell dans l'espace-temps \mathfrak{B}_4

Soit dans la variété espace-temps \mathfrak{B}_4 de la relativité générale, munie de la métrique d'univers

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

un domaine \mathfrak{D} occupé par une distribution matérielle schématisée sous forme de fluide — champ électromagnétique. \vec{u} désigne le vecteur vitesse unitaire en chaque point x de \mathfrak{D} . On appelle *repère propre* en x , un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec \vec{u} et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ orientés dans l'espace sont normés par la condition

$$g_{\alpha\beta} V^{(i)\alpha} V^{(i)\beta} = -1.$$

Les phénomènes électromagnétiques sont caractérisés par les deux champs de tenseurs antisymétriques d'ordre 2: le tenseur champ électrique — induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et le tenseur induction électrique — champ magnétique $G_{\alpha\beta}$, dont les composantes relatives à un repère propre au point x considéré ont pour valeurs

$$(H_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations

$$(1.2) \quad G_{0i} = \epsilon H_{0i}, \quad H_{ij} = \mu G_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

où les scalaires ϵ et μ représentent respectivement le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu considéré.

Nous introduisons les tenseurs adjoints

$$(1.3) \quad \hat{H}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta}, \quad \hat{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de \mathfrak{B}_4 . Les relations (1.2) peuvent alors s'écrire sous la forme invariante

$$(1.4) \quad G_{\alpha\beta} u^\alpha = \epsilon H_{\alpha\beta} u^\alpha,$$

$$(1.5) \quad \mu \hat{G}_{\alpha\beta} u^\alpha = \hat{H}_{\alpha\beta} u^\alpha$$

valable dans un système de coordonnées locales quelconque. Ces relations sont appelées les *équations de liaison*.

Les deux champs de tenseur $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire aux équations de MAXWELL qui s'écrivent

$$(1.6) \quad \nabla_\alpha \hat{H}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(1.7) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta.$$

J^β est le vecteur courant électrique. Le premier groupe des équations de MAXWELL peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0.$$

Il exprime qu'il existe localement un champ de vecteur φ_α dont $H_{\alpha\beta}$ est le rotationnel, c'est-à-dire

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha.$$

L'évolution du champ électromagnétique est déterminée, si l'on connaît J^β c'est-à-dire la distribution de l'électricité. On peut supposer pour un milieu non conducteur que \vec{J} est colinéaire au vecteur vitesse

$$J^\alpha = \delta u^\alpha.$$

δ s'appelle la densité propre de charge électrique, et le courant électrique est un courant de convection. Plus généralement, on est conduit à faire l'hypothèse

$$J^\alpha = \delta u^\alpha + \sigma u_\varrho H^{\varrho\alpha}$$

où δ est encore la densité propre de charge électrique et σ un scalaire caractérisant la conductivité électrique du milieu. \vec{J} possède alors une composante colinéaire à \vec{u} et une composante $J^\alpha = \sigma u_\varrho H^{\varrho\alpha}$ orthogonale à \vec{u} . La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction qui satisfait à l'hypothèse d'OHM.

Les équations (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) constituent les équations de l'électromagnétisme en présence d'inductions dans la matière. Dans le vide, on a l'égalité

$$(1.8) \quad \varepsilon \mu = 1$$

et les équations de MAXWELL deviennent

$$(1.9) \quad \nabla_\alpha \hat{H}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(1.10) \quad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0,$$

tandis que les équations de liaison se réduisent à

$$(1.11) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} = \varepsilon H_{\alpha\beta}.$$

Nous désignerons dans la suite par $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{D}}$ les vecteurs qui figurent au premier membre des équations de MAXWELL, soit

$$(1.12) \quad \mathcal{E}^\beta \equiv \nabla_\alpha \hat{H}^{\alpha\beta},$$

$$(1.13) \quad \mathcal{D}^\beta \equiv \nabla_\alpha G^{\alpha\beta}.$$

On démontre que leurs divergences sont nulles :

$$(1.14) \quad \nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0,$$

$$(1.15) \quad \nabla_\alpha \mathcal{D}^\alpha = 0.$$

Ces deux équations sont appelées les *conditions de conservation* relatives aux équations de MAXWELL. Elles expriment la conservation de l'électricité. Ainsi, on tire de (1.7) et (1.15)

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0.$$

2. Expression des $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$

Les équations de liaison (1.4) et (1.5) traduisent le caractère linéaire des relations entre inductions et champs. Elles montrent que les deux champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut exprimer les $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$.

En effet, à partir de (1.4) nous pouvons former l'égalité

$$(2.1) \quad (G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta = \varepsilon (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta.$$

D'autre part, (1.5) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha + G_{\gamma\alpha} u_\beta = \frac{1}{\mu} (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta)$$

vraie pour tout groupe de valeurs données à α, β, γ . Par multiplication contractée de cette relation avec u^β , puis en retranchant (2.1) de l'égalité ainsi obtenue, nous avons

$$G_{\gamma\alpha} = \frac{1}{\mu} (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta) u^\beta - \varepsilon (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta.$$

Nous en déduisons

$$(2.2) \quad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\mu} (H_{\sigma\alpha} u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta} u^\sigma u_\alpha).$$

C'est la relation cherchée. En composantes contravariantes, on a

$$(2.3) \quad G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H^{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon \mu}{\mu} (H^{\sigma\alpha} u_\sigma u^\beta - H^{\sigma\beta} u_\sigma u^\alpha).$$

3. L'intégration des équations de MAXWELL-EINSTEIN

Le champ électromagnétique $(H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta})$ et la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ sont liés par les équations de MAXWELL-EINSTEIN. Si le milieu meublant le domaine \mathfrak{D}_4 considéré est schématisé sous forme de fluide parait chargé et conducteur, les équations d'EINSTEIN sont★

$$(3.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) \tau_{\alpha\varrho} u^\varrho u_\beta,$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G_{\varrho\sigma} H^{\varrho\sigma}) - G_{\alpha\varrho} H^{\varrho\beta},$$

$$(3.2) \quad q_\alpha = - \kappa \partial_\varrho \vartheta (g_\alpha^\varrho - u^\varrho u_\alpha)$$

★ Cf. Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé [Jour. of Rational Mechanics and Analysis 5, No. 3, 473—583 (1956)].

où p est la pression et ϑ la température en chaque point du fluide. Les équations de MAXWELL sont

$$(3.3) \quad \mathcal{E}^\delta \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} V_\alpha H_{\beta\gamma} = 0,$$

$$(3.4) \quad \mathcal{D}_\beta \equiv g^{\alpha\varrho} V_\alpha G_{\varrho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta}.$$

A ces équations s'ajoutent les équations de conservation

$$(3.5) \quad V_\alpha T^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(3.6) \quad V_\alpha q^\alpha = c \varrho u^\alpha \partial_\alpha \vartheta - \frac{l}{\varrho} u^\alpha \partial_\alpha \varrho,$$

$$(3.7) \quad V_\alpha (\delta u^\alpha + \sigma u_\varrho H^{\varrho\alpha}) = 0.$$

Les scalaires $\varkappa, c, l, \varepsilon, \mu, \sigma$ sont supposés donnés; ils caractérisent le fluide envisagé qui admet de plus l'équation d'état

$$(3.8) \quad \varrho = \varphi(p, \vartheta).$$

Les variables de champ sont constituées par l'ensemble

$$\mathfrak{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$$

où le vecteur u^α est normé

$$(3.9) \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = +1.$$

Le problème qui se pose est celui de l'intégration des équations du champ. On peut l'étudier au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. Pour cela, on se donne sur une hypersurface \mathfrak{S} orientée dans l'espace, représentée localement par

$$x^0 = 0,$$

les valeurs des quantités

$$\mathcal{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0 \vartheta)$$

et on se propose de déterminer les divers champs $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ en dehors de \mathfrak{S} dans son domaine d'existence. Il suffit d'étudier la possibilité de calculer sur \mathfrak{S} les valeurs des différentes quantités introduites et de leurs dérivées successives.

L'espace-temps \mathfrak{V}_4 étant une variété différentiable de classe $(C^2, C^4$ par morceaux), on supposera donc $g_{\alpha\beta}$ de classe $(C^1, C^3$ par morceaux), $H_{\alpha\beta}$ de classe $(C^0, C^2$ par morceaux) et ϑ de classe $(C^2, C^4$ par morceaux).

Pour $g^{00} \neq 0$, les équations d'EINSTEIN sont équivalentes à l'ensemble des deux systèmes

$$(3.10) \quad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij} = \chi (T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij})$$

$$(3.11) \quad S_\alpha^0 = \chi [(\varrho + p) u^0 u_\alpha - p g_{\alpha}^0 - (u^0 q_\alpha + u_\alpha q^0) + \tau_\alpha^0 - (1 - \varepsilon \mu) \tau_\varrho^0 u^\varrho u_\alpha]$$

où les F_{ij} et S_α^0 ont des valeurs connues sur \mathfrak{S} . Les équations (3.11) jointes au caractère unitaire de u^α et à l'équation d'état fournissent les quantités p, u^α .

(3.10) déterminent alors $\partial_{00} g_{ij}$ si $g^{00} \neq 0$.

Les équations de MAXWELL sont équivalentes à l'ensemble du système

$$(3.12) \quad \mathcal{D}_i \equiv \frac{1}{\mu} (g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) (u^0)^2) \partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu} (g^{0j} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^j) \partial_0 H_{ji} + \Phi_i \\ = \delta u_i + \sigma u^0 H_{0i},$$

$$(3.13) \quad \mathcal{E}^i \equiv \frac{1}{2} \eta^{0jki} \partial_0 H_{jk} + \psi^i = 0$$

et des deux identités

$$(3.14) \quad \mathcal{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0},$$

$$(3.15) \quad \mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0$$

où les Φ_i et ψ^i ne dépendent pas des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ mais dépendent des $\partial_0 u^\alpha$ tandis que la quantité \mathcal{D}^0 ne dépend pas de $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ ni de $\partial_0 u^\alpha$. (3.15) exprime qu'il existe un potentiel vecteur local pour H_{ij} sur \mathfrak{S} . L'équation (3.14) détermine δ si $u^0 \neq 0$. Pour avoir $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, il faut chercher à déterminer d'abord les dérivées de u^α : soit $\partial_0 u^\alpha$. Cette détermination se fait simultanément avec celle de $\varepsilon_0 p$, $\varepsilon_{00} \vartheta$ au moyen des équations de conservation relatives aux équations d'EINSTEIN (3.5) auxquelles on adjoint le caractère unitaire de u^α , l'équation de conduction thermique (3.6) et l'équation d'état. Puis la dérivée $\partial_0 \delta$ se calcule par l'équation de conservation du courant électrique qui peut s'écrire

$$u^0 \partial_0 \delta = \Omega$$

où Ω dépend de $\partial_0 u^\alpha$ mais ne dépend pas de $\partial_0 H_{\alpha\beta}$.

Les $\partial_0 u^\alpha$ étant calculées, on les porte dans (3.12) et (3.13) qui fournissent enfin les $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ si

$$g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) (u^0)^2 \neq 0.$$

Si l'hypersurface \mathfrak{S} portant les données de Cauchy \mathcal{C} n'est pas exceptionnelle, il résulte des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7) que les quantités $\partial_{00} g_{ij}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, $\partial_{00} \vartheta$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 p$, $\partial_0 \delta$ sont bien déterminées et nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface \mathfrak{S} . Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de ces quantités si on suppose les données dérivables à un ordre plus élevé que celui de l'hypothèse.

La détermination des quantités précédentes ne fait pas intervenir les équations (3.11), (3.14), (3.15). Or celles-ci ne contiennent aucune dérivée oblique des données de Cauchy; celles-ci sont donc astreintes à vérifier sur la variété \mathfrak{S} les trois équations (3.11), (3.14), (3.15) ou leurs équivalentes

$$(I) \quad \begin{aligned} Q_\alpha^0 &\equiv S_\alpha^0 - \chi T_\alpha^0 = 0 \\ P^0 &\equiv \mathcal{D}^0 - (\delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0}) = 0 \\ \mathcal{E}^0 &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta}, \quad P_\alpha = \mathcal{D}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^0 H_{0\alpha}).$$

Considérons maintenant un ensemble $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$, solution des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7), correspondant à des données de Cauchy \mathcal{C} satisfaisant sur \mathfrak{S} aux équations (I). En vertu du caractère conservatif

des premiers membres des équations de MAXWELL-EINSTEIN et des équations de conservation (3.5), (3.7), on a

$$V_\alpha Q_\beta^\alpha = 0, \quad V_\alpha P^\alpha = 0, \quad V_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0.$$

Ces identités se réduisent en vertu de (3.11), (3.12), (3.13) aux équations

$$\begin{aligned} g^{00} \partial_0 Q_\alpha^0 &= A_\alpha^{i\beta} \partial_i Q_\beta^0 + B_\alpha^\beta Q_\beta^0 \\ \partial_0 P^0 &= -C^i \partial_i P^0 - (\partial_i C^i + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha C^\beta) P^0 \\ \partial_0 \mathcal{E}^0 &= -\Gamma_{\alpha 0}^\alpha \mathcal{E}^0 \end{aligned}$$

où les $A_\alpha^{i\beta}$, B_α^β , C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues Q_α^0 , P^0 , \mathcal{E}^0 . Comme $Q_\alpha^0 = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur \mathfrak{S} , elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (I) sont vérifiées sur \mathfrak{S} par les données de Cauchy, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy rendant compatibles les équations (3.11), (3.14), (3.15) qui permettent de calculer u^α , p , δ , puis dans l'intégration du système des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$. Si les données du problème étaient analytiques réelles, on pourrait établir à l'aide du théorème d'existence de CAUCHY-KOWALEWSKI pour les équations aux dérivées partielles, qu'à un changement de coordonnées près conservant point par point l'hypersurface \mathfrak{S} et les données de Cauchy sur \mathfrak{S} , le problème admet une solution analytique réelle et une seule, solution dont nous connaissons le développement suivant les puissances de x^0 . Sous des hypothèses de simple différentiabilité, la méthode de Mme FOURES permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

4. Les variétés caractéristiques \mathfrak{B}_3^M

Sur les équations (3.12), on voit que si l'hypersurface \mathfrak{S} portant les données de Cauchy est telle que sur \mathfrak{S}

$$g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) (u^0)^2 = 0,$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de \mathfrak{S} . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété \mathfrak{S} est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par \mathfrak{B}_3^M .

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques \mathfrak{B}_3^M définies par $f(x^\alpha) = 0$ sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(4.1) \quad (g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Nous supposerons que ces fronts d'ondes sont orientés dans le temps, ou à la rigueur tangents au cône élémentaire $ds^2 = 0$.

de \mathfrak{B}_4 ; nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences physiques relativistes. S'il en est ainsi,

$$A_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \varepsilon\mu) (u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0.$$

On en déduit

$$(4.2) \quad \varepsilon\mu \geq 1.$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'HUGONIOT permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela considérons deux surfaces d'ondes voisines $(\mathfrak{B}_3^M)_0$ et $(\mathfrak{B}_3^M)_\vartheta$ définies par les équations

$$f(x^\alpha) = 0, \quad f(x^\alpha) = \vartheta$$

et prenons ϑ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point x de $(\mathfrak{B}_3^M)_0$ coupe $(\mathfrak{B}_3^M)_\vartheta$ en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta \vec{u}$, η étant donné par la relation

$$(4.3) \quad \eta u^\alpha \partial_\alpha f = \vartheta.$$

Soit \vec{n} le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en x à la surface d'onde $(\mathfrak{B}_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en x

$$(4.4) \quad n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}.$$

La trajectoire orthogonale des \mathfrak{B}_3^M issue de x coupe $(\mathfrak{B}_3^M)_\vartheta$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1 \vec{n}$, η_1 étant déterminé par la relation

$$\eta_1 n^\lambda \partial_\lambda f = \vartheta.$$

On en déduit

$$(4.5) \quad \eta_1 = \frac{\vartheta}{n^\lambda \partial_\lambda f} = \frac{\vartheta \sqrt{-\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}{\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f} = \frac{-\vartheta}{\sqrt{-\varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}.$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}$. En vertu de (4.3) et (4.4), on a

$$\eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) = -\eta_1$$

et

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = (\eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}) \cdot \vec{n} = \eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \eta_1 = 0.$$

Le vecteur \vec{t} est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps, car son carré

$$\eta_0^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2 - \eta_1^2 - 2\eta\eta_1(\vec{u} \cdot \vec{n}) = \eta^2 + \eta_1^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta \vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orientée dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation V de l'onde se trouve définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left| \frac{\eta_1}{\eta_0} \right|.$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2},$$

soit, en remplaçant η_1 et η_0 par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc $1/\sqrt{\varepsilon \mu}$. Cette valeur appelle deux remarques: d'abord elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses ($\varepsilon \mu \geq 1$), la vitesse de propagation V est inférieure à une vitesse limite $c=1$; cette valeur limite coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\varepsilon \mu = 1$).

II. Étude des caractéristiques

5. Définition d'une métrique associée

L'intégration des équations de MAXWELL fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$(5.1) \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de MAXWELL. L'étude des variétés caractéristiques Q_3^M de celles-ci devient plus suggestive si l'on introduit la métrique riemannienne

$$(5.2) \quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

dont la matrice des coefficients $(\bar{g}_{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de la matrice $(g^{\alpha\beta})$. On obtient facilement

$$(5.3) \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta$$

en effectuant les calculs en repère propre. Et, si g et \bar{g} représentent respectivement le déterminant de la matrice $(g_{\alpha\beta})$ et celui de la matrice $(\bar{g}_{\alpha\beta})$, on a la relation

$$(5.4) \quad g = \varepsilon \mu \bar{g}.$$

La métrique $d\bar{s}^2$ sera dite *métrique associée*. Elle joue un rôle fondamental dans l'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL. La métrique d'univers $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ est du type hyperbolique normal. Rapportée à un repère propre, elle prend la forme canonique

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

où les (ω^α) sont un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes. La métrique associée prend elle-même la forme

$$d\bar{s}^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta \right) \omega^\alpha \omega^\beta$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $\delta_{00} = +1$ et $\delta_{ii} = -1$ et $u_0 = 1$, $u_i = 0$ dans le repère propre. On en déduit

$$d\bar{s}^2 = \left(\frac{\omega^0}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2,$$

ce qui montre que la métrique associée est également de type hyperbolique normal.

Nous désignerons dans la suite par $\bar{\mathfrak{V}}_4$ la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant \mathfrak{V}_4 et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$. Et nous distinguerons par une barre supérieure les quantités définies relativement à $\bar{\mathfrak{V}}_4$. Nous appellerons cône élémentaire associé $\bar{\mathfrak{C}}_x$ en un point x , le cône réel de directions tangentes à $\bar{\mathfrak{V}}_4$ défini par l'équation $d\bar{s}^2 = 0$.

6. Étude des bicaractéristiques

Dans l'espace riemannien $\bar{\mathfrak{V}}_4$, les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL, définies localement par $f(x^\alpha) = 0$, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(6.1) \quad \bar{A}_1 f \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Elles ont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé $\bar{\mathfrak{C}}_x$. Les cônes élémentaires $\bar{\mathfrak{C}}_x$ de $\bar{\mathfrak{V}}_4$ sont donc cônes caractéristiques pour les équations de MAXWELL et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes. Mais dans l'espace-temps \mathfrak{V}_4 les cônes caractéristiques des équations de MAXWELL sont en général différents des cônes élémentaires \mathfrak{C}_x ($d\bar{s}^2 = 0$). Ils ne coïncident avec ces derniers que dans les régions vides de matière.

Une variété caractéristique \mathfrak{V}_3^M , c'est-à-dire une solution de (6.1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (6.1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de $\bar{\mathfrak{V}}_4$ constituées chacune par l'ensemble d'une courbe \mathfrak{L}_0 et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes \mathfrak{L}_0 sont appelées les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Pour les déterminer, posons

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(6.2) \quad \bar{A}_1 f \equiv 2H(x^\lambda, \partial_\mu f) = C$$

où C est une constante arbitraire. Relativement aux variables x^α, f, y_β , les bandes caractéristiques des équations de MAXWELL (3.1) et (3.2) sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\partial H} = \cdots = \frac{dx^3}{\partial H} = \frac{df}{2H} = - \frac{dy_0}{\partial H} = \cdots = - \frac{dy_3}{\partial H} = du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = C$$

pour la valeur C de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire u , les fonctions $x^\alpha(u)$, $y_\beta(u)$ sont données par le système canonique

$$(6.3) \quad \frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \frac{dy_\alpha}{du} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

relatif à la fonction hamiltonienne $H(x^\lambda, y_\mu)$. Le premier groupe des équations (6.3) s'écrit explicitement

$$(6.4) \quad \dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \quad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \right).$$

Inversement

$$(6.5) \quad y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha.$$

Cela posé, les solutions $x^\alpha(u)$ de (6.3) sont extrêmales de la fonction lagrangienne L définie par

$$2L = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ aux variables canoniques (x^β, y_β) qui leur sont liées par (6.4) et (6.5), on a entre H et L la relation classique

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - L = L.$$

Ces solutions sont les extrêmales satisfaisant à l'intégrale première

$$(6.6) \quad 2L = C$$

pour la valeur C de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrêmales ainsi définies sont aussi les extrêmales de

$$\sqrt{2L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (6.6). Il en résulte que les $x^\alpha(u)$ définissent des géodésiques de $\bar{\mathcal{V}}_4$. Si $C = 0$, le système différentiel aux caractéristiques de (6.1) admet l'intégrale première $f = \text{const.}$ et les variétés \mathcal{V}_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\bar{\mathcal{V}}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\bar{\mathcal{L}}_0$, le 3-plan associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\bar{\mathcal{C}}_x$ le long de la tangente à $\bar{\mathcal{L}}_0$.

Nous avons démontré le théorème:

Théorème. *Les bicaractéristiques des équations de MAXWELL sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{\mathcal{V}}_4$ munie de la métrique associée*

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques \mathcal{V}_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\bar{\mathcal{L}}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Théorème. *Dans un milieu isotrope de constantes diélectrique et magnétique ϵ, μ variables, les rayons électromagnétiques peuvent être considérés comme géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien $\bar{\mathcal{V}}_4$ muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon\mu} \right) u_\alpha u_\beta \right) dx^\alpha dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental et u_α le vecteur vitesse unitaire d'univers défini en chaque point du milieu.

7. Les équations de l'électromagnétisme dans la métrique associée

Définissons sur \mathfrak{B}_4 le champ de tenseur antisymétrique $\bar{H}_{\alpha\beta}$ tel qu'en chaque point (x^α)

$$\bar{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}.$$

En élevant les indices de $\bar{H}_{\alpha\beta}$ à l'aide du tenseur métrique de \mathfrak{B}_4 , nous avons

$$\bar{H}^{\alpha\beta} = \bar{g}^{\rho\alpha} \bar{g}^{\sigma\beta} \bar{H}_{\rho\sigma} = (g^{\rho\alpha} - (1 - \varepsilon\mu) u^\rho u^\alpha) (g^{\sigma\beta} - (1 - \varepsilon\mu) u^\sigma u^\beta) H_{\rho\sigma}$$

d'où

$$\bar{H}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\sigma\beta} H_{\rho\sigma} + (1 - \varepsilon\mu) (g^{\rho\alpha} H_{\sigma\rho} u^\sigma u^\beta - g^{\sigma\beta} H_{\rho\sigma} u^\rho u^\alpha).$$

En comparant cette égalité avec la relation (2.3) donnant l'expression de $G^{\alpha\beta}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$, nous voyons qu'en chaque point (x^α)

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} \bar{H}^{\alpha\beta}.$$

L'étude du problème de Cauchy relatif aux équations de MAXWELL dans \mathfrak{B}_4 nous suggère d'écrire les équations suivantes dans \mathfrak{B}_4 :

$$(7.1) \quad \bar{\nabla}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(7.2) \quad \bar{\nabla}_\alpha \bar{G}^{\alpha\beta} = \bar{J}^\beta$$

où $\bar{G}_{\alpha\beta}$ est un tenseur proportionnel à $\bar{H}_{\alpha\beta}$. Le premier groupe (7.1) s'écrit encore

$$\bar{\nabla}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{|\bar{g}|}}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha \bar{H}_{\gamma\delta} = 0.$$

Il exprime qu'il existe localement un champ de vecteur $\bar{\varphi}_\alpha$ dont $\bar{H}_{\alpha\beta}$ est le rotationnel. Comme $g = \varepsilon\mu\bar{g} \neq 0$ et que $\bar{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$ au point considéré, on voit que les équations (7.1) sont équivalentes aux équations de MAXWELL du premier groupe (16) dans \mathfrak{B}_4 . Et nous pouvons identifier les deux potentiels vecteurs $\bar{\varphi}_\alpha$ et φ_α .

Quant aux équations (7.2), on peut les écrire

$$\bar{\nabla}_\alpha \bar{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_\alpha (|\bar{g}| \bar{G}^{\alpha\beta}) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\bar{g}}} \partial_\alpha \left(|\bar{g}| \frac{\bar{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right) = \bar{J}^\beta$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|g|} \frac{\bar{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \right) = \frac{\bar{J}^\beta}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

En comparant cette équation avec les équations de MAXWELL du second groupe (1.7) dans \mathfrak{B}_4 écrivées sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (|\bar{g}| G^{\alpha\beta}) = J^\beta,$$

on voit que les équations (7.2) sont équivalentes aux équations (1.7) si l'on prend

$$\bar{G}^{\alpha\beta} = \sqrt{\varepsilon\mu} G^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \bar{J}^\beta = \sqrt{\varepsilon\mu} J^\beta.$$

On est conduit à poser

$$(7.3) \quad \bar{G}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \bar{H}_{\alpha\beta}.$$

En particulier, si l'on fait l'hypothèse

$$J^\beta = \delta u^\beta + \sigma u_\alpha H^{\alpha\beta},$$

on vérifie que

$$\bar{J}^\beta = \delta \bar{u}^\beta + \sigma \bar{u}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta}$$

où $\bar{u}^\alpha = dx^\alpha/d\bar{s}$. On observera que les scalaires $\varepsilon, \mu, \sigma, \delta$ sont les mêmes dans \mathfrak{B}_4 et $\bar{\mathfrak{B}}_4$.

L'étude précédente montre que les équations de MAXWELL peuvent s'exprimer directement dans la métrique associée comme

$$\begin{aligned} \bar{V}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta} &= 0, \\ \bar{V}_\alpha \bar{G}^{\alpha\beta} &= \bar{J}^\beta \end{aligned}$$

où $\bar{G}_{\alpha\beta}$ est lié à $\bar{H}_{\alpha\beta}$ par la relation simple

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \bar{H}_{\alpha\beta}$$

et où le vecteur \bar{J}^β satisfait à l'hypothèse

$$\bar{J}^\beta = \delta \bar{u}^\beta + \sigma \bar{u}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta}.$$

On retrouve facilement à partir de ces équations, les résultats établis aux paragraphes précédents.

Ainsi, la formulation de la théorie électromagnétique de MAXWELL se fait de façon équivalente dans \mathfrak{B}_4 et dans $\bar{\mathfrak{B}}_4$. Il convient d'observer que les équations de MAXWELL conduisent en Physique classique à l'étude de l'opérateur linéaire hyperbolique du second ordre

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Cet opérateur reste invariant par le groupe de LORENTZ, c'est-à-dire le groupe de transformations qui laisse invariante la forme quadratique de différentielles

$$V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

et celle-ci n'est que la traduction en repère propre de la forme métrique associée qui s'écrit ici

$$d\bar{s}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

On voit que

$$V = \sqrt{\frac{c}{\varepsilon \mu}}.$$

La quantité $\sqrt{\varepsilon \mu}$ qui se présente dans notre étude peut être interprétée comme l'indice de réfringence du milieu considéré. Nous poserons

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

n est un nombre positif ≥ 1 sans dimensions.

III. Mouvement permanent d'un fluide parfait chargé

8. Espace-temps stationnaire dans un domaine

Considérons un domaine déterminé \mathfrak{D}_4 à quatre dimensions de \mathfrak{V}_4 et supposons que la variété riemannienne définie par \mathfrak{D}_4 munie de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

admette un groupe connexe d'isométries globales à un paramètre, ne laissant invariant aucun point de \mathfrak{D}_4 et dont les trajectoires z soient orientées dans le temps. Nous supposons de plus que:

- a) les z sont homéomorphes à la droite réelle \mathfrak{N} ;
- b) l'on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions \mathfrak{D}_3 , satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que \mathfrak{V}_4 , telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de même classe de \mathfrak{D}_4 sur le produit topologique $\mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{N}$ dans lequel les z s'appliquent sur les lignes facteurs.

Dans ces conditions, nous dirons que l'espace-temps riemannien \mathfrak{V}_4 est *stationnaire* dans \mathfrak{D}_4 . Les trajectoires z sont appelées *lignes de temps*. La variété \mathfrak{D}_3 quotient de \mathfrak{D}_4 par la relation d'équivalence définie par le groupe est appelée *espace*.

Soit $\vec{\xi}$ le générateur infinitésimal du groupe d'isométries. Aucun point de \mathfrak{D}_4 n'étant invariant, $\vec{\xi}$ est $\neq 0$ en tout point de \mathfrak{D}_4 . On sait que ce vecteur satisfait aux équations de KILLING

$$(8.1) \quad X g_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

où X désigne l'opérateur de dérivation de Lie relatif au vecteur $\vec{\xi}$.

On peut définir dans \mathfrak{D}_4 des systèmes de coordonnées locales (x^α) , dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante: les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraire de \mathfrak{D}_3 . La donnée des (x^i) détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant les variétés homéomorphes à \mathfrak{D}_3 définies par l'homéomorphisme b) et telles que les composantes de $\vec{\xi}$ soient

$$\xi^0 = 1, \quad \xi^i = 0.$$

Dans ces systèmes de coordonnées adaptés, on a

$$\xi_\alpha = g_{\alpha 0}$$

et les équations de KILLING se traduisent comme

$$X g_{\alpha\beta} = \partial_0 g_{\alpha\beta} = 0.$$

Ainsi, les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de la variable x^0 .

Dans la suite, nous n'introduirons que des systèmes de coordonnées locales adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

à partir de la variable directrice dx^0 , nous obtenons

$$(8.2) \quad ds^2 = \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} dx^\alpha)^2 + d\hat{s}^2$$

où

$$(8.3) \quad d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j$$

est indépendante de x^0 et définit sur \mathfrak{D}_3 une métrique riemannienne définie négative.

9. Mouvement permanent d'un fluide parfait chargé

Considérons un fluide parfait chargé et conducteur en mouvement dans un domaine \mathfrak{D}_4 . Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps riemannien associé \mathfrak{B}_4 est stationnaire dans le domaine \mathfrak{D}_4 et si le groupe d'isométries laisse invariants le vecteur vitesse unitaire u^α , la pression p , la température ϑ , la densité de charge électrique δ , le vecteur courant de chaleur q_α et le champ électromagnétique induit $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$.

$$X g_{\alpha\beta} = X H_{\alpha\beta} = X G_{\alpha\beta} = X u^\alpha = X \vartheta = X q_\alpha = X p = X \delta = 0.$$

Les quantités $g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, u^α , ϑ , q_α , p , δ restent donc constantes le long des trajectoires d'isométries ou lignes de temps. Dans un système de coordonnées adapté, les égalités précédentes deviennent

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 H_{\alpha\beta} = \partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 u^\alpha = \partial_0 \vartheta = \partial_0 q_\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0;$$

les $g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, u^α , ϑ , q_α , p , δ ne dépendent pas de la variable x^0 .

Considérons un mouvement du fluide envisagé tel que

a) l'espace-temps riemannien associé \mathfrak{B}_4 soit stationnaire dans \mathfrak{D}_4 ,

b) le groupe d'isométries laisse invariants $H_{\alpha\beta}$, ϑ , c , l , \varkappa , ε , μ , σ .

Nous allons montrer que s'il en est ainsi, le mouvement du fluide est permanent. Or les hypothèses a et b se traduisent en coordonnées adaptées par les conditions *

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 H_{\alpha\beta} = \partial_0 \vartheta = \partial_0 \varkappa = \partial_0 c = \partial_0 l = \partial_0 \varepsilon = \partial_0 \mu = \partial_0 \sigma = 0.$$

Il nous suffit de montrer que $\partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 u^\alpha = \partial_0 q_\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0$.

Soit x un point arbitraire de \mathfrak{D}_4 . Choisissons un système de coordonnées adapté (x^0, x^i) tel que le point x appartienne à la variété \mathfrak{S} d'équation $x^0 = 0$. Supposons que la variété \mathfrak{S} soit orientée dans l'espace et qu'elle ne soit pas une variété exceptionnelle du problème de Cauchy relatif aux équations du champ correspondant au fluide considéré. Nous savons alors (cf. § 3) que pour un

* Dans un mémoire antérieur «Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques» [Ann. di Math. pura ed applicata, ser. IV 38 (1955)], nous avons étudié les mouvements permanents d'un fluide thermodynamique pur en supposant en plus des conditions $\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 \vartheta = 0$ l'hypothèse

$$\partial_0 q^0 = c \varrho u^0 \partial_0 \vartheta - \frac{l}{\varrho} u^0 \partial_0 \varrho.$$

En fait, cette dernière hypothèse est une conséquence de $\partial_0 \vartheta = 0$. Les conditions $X g_{\alpha\beta} = X \vartheta = 0$ suffisent pour assurer que le mouvement du fluide thermodynamique est permanent.

système de données de Cauchy $\mathcal{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0 \vartheta)$ portées par \mathfrak{S} et satisfaisant à

$$(I) \quad Q^0_\alpha = 0, \quad P^0 = 0, \quad \mathcal{E}^0 = 0$$

le système des équations du champ admet une solution $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ bien déterminée. De plus les équations (I) qui sont vérifiées sur S sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps \mathfrak{D}_4 considéré.

Considérons maintenant la variété \mathfrak{S}' d'équation

$$x^0 = h$$

qui correspond point par point à la variété \mathfrak{S} dans l'homéomorphisme qui applique \mathfrak{D}_4 sur le produit topologique $\mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{N}$ dans lequel les lignes de temps z s'appliquent sur les lignes facteurs. En vertu de l'hypothèse a) et b), la solution $\mathcal{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ est telle qu'aux points z de mêmes coordonnées locales (x^i) de \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' , les quantités $\mathcal{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0 \vartheta)$ ont des valeurs égales. Pour la solution \mathcal{H} , ces quantités vérifient des équations (I') identiques à (I). Si donc on se pose le problème de Cauchy avec les données \mathcal{C} précédentes portées par \mathfrak{S}' , on doit calculer d'abord les quantités u^α, p, δ , à partir des équations (I'), puis intégrer les équations du champ. Comme toutes les équations sont identiques et que les données sont identiques, on obtient une solution \mathcal{H}' identique à la solution \mathcal{H} . Autrement dit, aux points de mêmes coordonnées locales x^i les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ ont mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées: elles sont donc invariantes le long des lignes de temps.

Il en résulte que les hypothèses a) et b) entraînent

$$\partial_0 u^\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0$$

et en vertu des équations de définition de $G_{\alpha\beta}$ et q_α

$$\partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 q_\alpha = 0.$$

$$X g_{\alpha\beta} = X H_{\alpha\beta} = X G_{\alpha\beta} = X u_\alpha = X \vartheta = X q_\alpha = X p = X \delta = 0.$$

Le mouvement considéré du fluide est donc permanent. On peut énoncer le théorème:

Théorème. *Etant donné dans un domaine \mathfrak{D}_4 un fluide parfait chargé et conducteur, pour que le mouvement de ce fluide soit permanent, il faut et il suffit que*

- l'espace-temps riemannien associé \mathfrak{D}_4 soit stationnaire dans \mathfrak{D}_4 ,*
- le groupe d'isométries laisse invariants les champs ϑ et $H_{\alpha\beta}$ et les coefficients $c, l, \varkappa, \varepsilon, \mu, \sigma$.*

Remarque. — S'il existe pour le champ électromagnétique un potentiel vecteur global c'est-à-dire un champ de vecteur φ_α tel que

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha$$

ce qui est en particulier le cas si le domaine \mathfrak{D}_4 est simplement connexe, on remplacera l'hypothèse concernant le champ $H_{\alpha\beta}$ par l'hypothèse équivalente concernant le potentiel vecteur: on supposera φ_α invariant par le groupe d'isométries.

10. Isométrie induite dans $\bar{\mathfrak{B}}_4$

Nous considérerons dans la suite un domaine simplement connexe \mathfrak{D}_4 occupé par un milieu chargé et conducteur. Nous supposerons plus généralement que le mouvement de ce milieu soit tel que l'espace-temps riemannien associé \mathfrak{B}_4 est stationnaire dans \mathfrak{D}_4 et que le groupe d'isométries laisse invariants le vecteur vitesse unitaire \vec{u} et l'indice $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ du milieu

$$(10.1) \quad X g_{\alpha\beta} = X u_\alpha = X n = 0.$$

Il en est ainsi en particulier si le milieu considéré est un fluide parfait chargé en mouvement permanent.

D'après (10.1), les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont invariantes par le groupe d'isométries de \mathfrak{B}_4 . Il en résulte que le champ de vecteur contravariant $\vec{\xi}$ générateur du groupe d'isométries de \mathfrak{B}_4 détermine dans la variété riemannienne $\bar{\mathfrak{B}}_4$ définie par la variété différentiable portant \mathfrak{D}_4 et munie de la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

un groupe connexe d'isométries globales ne laissant invariant aucun point du domaine $\bar{\mathfrak{D}}_4$ correspondant, et pour lequel le système de coordonnées (x^0, x^i) est un système de coordonnées locales adapté. On peut prendre pour générateur infinitésimal de ce groupe le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes

$$\zeta^0 = \xi^0 = 1, \quad \zeta^i = \xi^i = 0.$$

Il est manifeste que le carré de ce vecteur a pour valeur

$$(10.2) \quad (\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (u_0)^2.$$

Introduisons maintenant la grandeur d'espace du vecteur \vec{u} relativement à la direction de temps $\vec{\xi}$. Soit

$$-w^2 = \hat{g}_{ij} u^i u^j.$$

En vertu du caractère unitaire de \vec{u} , on a

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \equiv \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} u^\alpha)^2 + \hat{g}_{ij} u^i u^j = 1.$$

On en déduit

$$(u_0)^2 = g_{00} (1 + w^2).$$

En portant cette valeur dans (10.2) et en y remplaçant $\frac{1}{n^2}$ par V^2 , il vient

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} (V^2 w^2 + V^2 - w^2).$$

On voit que le signe de $(\vec{\zeta})^2$ peut changer. Dans $\bar{\mathfrak{B}}_4$, le vecteur $\vec{\zeta}$ peut être orienté dans le temps, dans l'espace ou être isotrope. Il en est de même des trajectoires d'isométries de $\bar{\mathfrak{B}}_4$.

IV. Étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace

11. Un problème du calcul des variations

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable \mathfrak{V}_{n+1} , soit $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de \mathfrak{V}_{n+1} . Si l'on adopte sur \mathfrak{V}_{n+1} des coordonnées locales (x^α) , chaque élément de $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées (x^α) du point x correspondant de \mathfrak{V}_{n+1} et des $n+1$ composantes (\dot{x}^β) du vecteur \dot{x} dans le repère naturel en x associé aux (x^α) . Une structure de variété finslérienne sur \mathfrak{V}_{n+1} est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ telle que pour x fixe, $\mathcal{L}(x, \lambda \dot{x}) = \lambda \mathcal{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux \dot{x}^β .

Considérons une variété différentiable \mathfrak{V}_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales, de générateur infinitésimal $\vec{\xi}$, ne laissant invariant aucun point de \mathfrak{V}_{n+1} ($\vec{\xi} \neq 0$). Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle \mathfrak{R} , et soit \mathfrak{V}_n la variété de \mathfrak{V}_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. On sait qu'il existe des systèmes de coordonnées locales (x^0, x^i) adaptés au groupe d'isométries, tels que dans le repère naturel associé, $\vec{\xi}$ ait pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1, \quad \xi^i = 0$$

et que les (x^i) soient un système de coordonnées locales arbitraire de \mathfrak{V}_n . La donnée des (x^i) détermine une trajectoire z . Pour déterminer un point sur cette trajectoire, on se donne la variété $x^0 = \text{const}$ à laquelle il appartient.

Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i) , l'hypothèse d'isométrie se traduit par le fait que la fonction \mathcal{L} est localement indépendante de la variable x^0 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0).$$

Nous allons montrer qu'il est possible de donner la variété quotient \mathfrak{V}_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions $L(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de \mathfrak{V}_{n+1} extrémales de l'intégrale

$$(11.1) \quad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, \dot{x}) \, du, \quad \dot{x} = \frac{dx}{du}$$

correspondent par projection sur \mathfrak{V}_n des extrémales de

$$(11.2) \quad \int_{z_0}^{z_1} L(z, \dot{z}) \, du, \quad \dot{z} = \frac{dz}{du}.$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \dots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \dots, n$ et nous supposons

$$\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0, \quad \partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}.$$

Donnons nous une extrémale de (11.1) par une représentation paramétrique $x^\alpha(u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrémales de (11.1)

$$(11.3) \quad \frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha$$

où \dot{x}^α satisfait à

$$(11.4) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$(11.5) \quad \omega = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha = \partial_k \mathcal{L} dx^k + \partial_0 \mathcal{L} dx^0.$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$(11.6) \quad \partial_0 \mathcal{L} = h.$$

Comme $\partial_{00} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (11.6) par rapport à \dot{x}^0 ; on a l'équation équivalente

$$(11.7) \quad \dot{x}^0 = \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)$$

où φ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux \dot{x}^l et φ dépend effectivement de h .

Considérons la famille des extrémales (\mathfrak{E}_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h . Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur $h dx^0$ et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrémales admet l'invariant intégral relatif

$$(11.8) \quad \partial_k \mathcal{L} dx^k.$$

Or, d'après l'homogénéité de \mathcal{L} , on a

$$\dot{x}^k \partial_k \mathcal{L} + \dot{x}^0 \partial_0 \mathcal{L} = \mathcal{L}.$$

Par suite, pour toute solution (11.6) ou (11.7), la quantité $\dot{x}^k \partial_k \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, \dot{x}^l, h

$$(11.9) \quad L(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)$$

et l'on a

$$\partial_k L = \partial_k \mathcal{L} + \partial_0 \mathcal{L} \partial_k \varphi - h \partial_k \varphi = \partial_k \mathcal{L}.$$

Ainsi, d'après (11.8), les projections des (\mathfrak{E}_h) sur \mathfrak{B}_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_k L dx^k.$$

Autrement dit, elles sont extrémales de l'intégrale

$$(11.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} L(x^k, \dot{x}^l, h) du$$

où h a la valeur choisie.

On appelle descente la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $L(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible★.

★ Voir LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Livre II, chap. I.

12. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{\mathcal{B}}_4$

Nous supposons que la variété riemannienne $\bar{\mathcal{B}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe 10. La fonction \mathcal{L} est définie par la relation

$$(12.1) \quad \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée puisque $\bar{g} = \det(\bar{g}_{\alpha\beta}) \neq 0$. Étudions d'abord les extrémales correspondant aux valeurs de \dot{x}^α pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

Premier cas: \bar{g}_{00} ne s'annule pas dans le domaine étudié. — Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$(12.2) \quad \frac{1}{2} \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00} \dot{x}^0 + \bar{g}_{0i} \dot{x}^i = h \mathcal{L}$$

et à éliminer \dot{x}^0 entre cette équation et

$$(12.3) \quad L = \mathcal{L} - h \dot{x}^0.$$

En décomposant \mathcal{L}^2 en carrés à partir de la variable directrice \dot{x}^0 , il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} \left(\frac{1}{2} \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2 \right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i} \bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2} \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2 = h \mathcal{L}$, on tire l'équation

$$(12.4) \quad \mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}}}$$

qui fournit \mathcal{L} en fonction des variables x^k, \dot{x}^l, h . De (12.2) on tire ensuite

$$(12.5) \quad \dot{x}^0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}} \mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}.$$

On en déduit d'après (12.3) et en vertu de (12.4)

$$(12.6) \quad L = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}} \right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + h \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}}$$

où ε est le signe de \bar{g}_{00} .

L est bien une fonction de x^k, \dot{x}^l, h homogène et du premier degré par rapport aux \dot{x}^l . Elle définit sur la variété quotient $\bar{\mathcal{B}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\bar{\mathcal{B}}_3$ la fonction $L(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ homogène et de degré 1 par rapport aux \dot{x}^α , qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}.$$

Les courbes extrémales correspondantes sont donc des géodésiques de $\bar{\mathcal{B}}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\bar{\mathcal{B}}_4$ qui correspondent à l'intégrale première

$$\partial_0 \mathcal{L} = h$$

se projettent sur la variété quotient $\bar{\mathcal{B}}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$(12.7) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left[-\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right] du$$

où h a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$(12.8) \quad \int_{z_0}^{z_1} \frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}} du.$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de \dot{x}^0 :

$$(12.9) \quad dx^0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}} \hat{\bar{g}}_{ij} dx^i dx^j - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}}}.$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\bar{\mathcal{B}}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathcal{L} \rightarrow 0$. De la relation

$$h \mathcal{L} = \bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$$

il résulte que $h \rightarrow \infty$ lorsque $\mathcal{L} \rightarrow 0$ et h a le signe de $g_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

On en déduit que $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (12.8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\bar{\mathcal{B}}_4$ sur $\bar{\mathcal{B}}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du.$$

En passant à la limite, on en déduit le résultat suivant:

Lemme 1. *Les géodésiques de longueur nulle de $\bar{\mathcal{B}}_4$ se projettent sur $\bar{\mathcal{B}}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$(12.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} d\dot{x}^i d\dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

où ε est le signe de \bar{g}_{00} et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.

D'après (12.9), le long de ces extrêmales on a

$$(12.11) \quad dx^0 = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} d\dot{x}^i d\dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}}.$$

On remarquera que $dx^0 = L du$.

Second cas: $\bar{g}_{00}=0$. — On a alors

$$(12.12) \quad \mathcal{L}^2 = 2\bar{g}_{0i}\dot{x}^0\dot{x}^i + \bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Nous supposerons $\bar{g}_{0i}\dot{x}^i$ fini $\neq 0$. Le procédé de descente nous conduit à éliminer \mathcal{L} et \dot{x}^0 entre (12.12) et

$$(12.13) \quad \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathcal{L},$$

$$(12.14) \quad L = \mathcal{L} - h\dot{x}^0.$$

De (12.13) on tire

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{h}.$$

En reportant dans (12.12), il vient

$$\frac{(\bar{g}_{0i}\dot{x}^i)^2}{h^2} - 2\bar{g}_{0i}\dot{x}^0\dot{x}^i - \bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

On en déduit

$$\dot{x}^0 = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}.$$

L'équation (12.14) détermine alors L

$$(12.15) \quad L = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} + h\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}.$$

Inversement, à toute fonction L de la forme précédente correspond par montée la fonction \mathcal{L} définie par (12.12). On note que L se présente par rapport aux variables \dot{x}^i comme le quotient d'une forme quadratique par une forme linéaire.

Ainsi, dans le cas $\bar{g}_{00}=0$, les projections des géodésiques de $\bar{\mathfrak{V}}_4$ sur $\bar{\mathfrak{V}}_3$ sont les courbes extrémiales de

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} + h \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i} \right) du$$

pour la valeur correspondante de la constante h . Ces extrémiales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(- \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h^2} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i} \right) du.$$

Comme précédemment, les projections des géodésiques de longueur nulle sont définies par

$$\int_{z_0}^{z_1} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(- \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h^2} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i} \right) du.$$

On en déduit en passant à la limite, le lemme

Lemme 2. *Dans tout domaine de \mathfrak{B}_4 où $\bar{g}_{00}=0$, les géodésiques de longueur nulle de \mathfrak{B}_4 se projettent sur \mathfrak{B}_3 selon les extrémales de l'intégrale*

$$(12.16) \quad \int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du.$$

Le long de ces extrémales on a

$$dx^0 = -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du.$$

13. Le principe de FERMAT

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne \mathfrak{B}_4 . Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet les lemmes 1 et 2 fournissent une démonstration immédiate du théorème suivant :

Théorème. *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que*

$$\bar{g}_{00} = g_{00}(V^2 w^2 + V^2 - w^2) \neq 0,$$

les rayons électromagnétiques dans l'espace sont des lignes réalisant l'extrémum de l'intégrale

$$(13.1) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε est le signe de \bar{g}_{00} et ε' le signe de $\bar{g}_{0i} \dot{x}^i$. Le temps mis par un rayon pour aller du point z_0 au point z_1 est donné par

$$(13.2) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du.$$

Ce temps est extrémum.

Dans le cas où $\bar{g}_{00}=0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (13.1) et (13.2) respectivement par

$$(13.3) \quad \int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$(13.4) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du.$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps \mathfrak{B}_4 est orthogonal. Soit

$$ds^2 = U(dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

la métrique d'univers de \mathfrak{B}_4 . Les u^i étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{U}{n^2} (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j.$$

On peut mettre (13.2) sous la forme

$$(13.5) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 - \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{U} n d\sigma$$

où l'on a posé

$$d\sigma^2 = -g_{ij} dx^i dx^j.$$

Cette intégrale rappelle une intégrale qui se présente dans l'étude des fluides holonomes. Or U est le potentiel principal de gravitation. Le champ gravitationnel agirait si l'on ose dire, comme une espèce de pression sur les rayons électromagnétiques.

Si $U=1$, on démontre que l'espace-temps \mathfrak{B}_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int n d\sigma = 0.$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de FERMAT en optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en Relativité générale.

14. Interprétation du signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$

Nous avons interprété \dot{x}^0 comme la variable temps. L'interprétation du signe ε' de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ est simple. En effet, l'équation

$$(\bar{C}_x) \quad \mathcal{L}^2 du^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij} dx^i dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique $\bar{\mathcal{C}}_x$ au point x des équations de MAXWELL. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire

$$(\pi_x) \quad \bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha = 0.$$

Désignons par $M(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\bar{\mathcal{C}}_x$. Prenons un couple de points voisins de M , ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ et appartenant respectivement aux deux nappes du cône et symétriques par rapport à π_x . Soient

$$M_1(x^i + dx^i, x^0 + dx^0), \quad M'_1(x^i + dx^i, x^0 - d'x^0).$$

On peut dire que MM_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près, le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point d'espace $A(x^i)$ au point d'espace $A'(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0 . De même, MM'_1 peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point $A'(x^i + dx^i)$ au point $A(x^i)$ dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M'_1 sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x , on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha = -\bar{g}_{0\alpha} d'x^\alpha.$$

On en déduit

$$d'x^0 = dx^0 + 2 \frac{\bar{g}_{0i}}{\bar{g}_{00}} \frac{dx^i}{d\sigma}.$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace $A(x^i)$ au point d'espace $A'(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de $A'(x^i + dx^i)$ à $A(x^i)$.

15. Espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$(15.1) \quad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

\vec{u} représente dans le cas actuel le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$ si la vitesse limite c est prise comme unité.

Un calcul facile donne la métrique associée

$$(15.2) \quad d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} (dx^0)^2 + 2 \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} \beta_i dx^0 dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} (\beta_i dx^i)^2.$$

Cette métrique est du type hyperbolique normal comme la métrique d'univers (15.1). Il est cependant intéressant de noter un changement de l'ordre dans la signature de cette métrique au passage de $V^2 = \beta^2$. On le met facilement en évidence en choisissant l'axe des x^1 parallèle à la vitesse $\vec{\beta}$ du milieu. On a ainsi la métrique

$$(15.3) \quad d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} (dx^0)^2 + 2 \frac{(1 - V^2)\beta}{1 - \beta^2} dx^0 dx^1 - \frac{1 - V^2\beta^2}{1 - \beta^2} (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique par une décomposition en carrés. Si $V^2 \neq \beta^2$ on obtient

$$d\bar{s}^2 = \frac{1 - \beta^2}{V^2 - \beta^2} \left[\frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} dx^0 + \frac{(1 - V^2)\beta}{1 - \beta^2} dx^1 \right]^2 - \frac{(1 - \beta^2)V^2}{V^2 - \beta^2} (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

et l'on voit que pour $V^2 > \beta^2$ cette métrique a pour signature « +--- » et pour $V^2 < \beta^2$ elle a pour signature « -+-- ». Pour $V^2 = \beta^2$, on obtient

$$d\bar{s}^2 = 2V dx^0 dx^1 - (1 + V^2) (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

On vérifie également que cette métrique a pour signature « +--- » en la mettant sous la forme

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2}{(1 + V^2)} (dx^0)^2 - \frac{1}{1 + V^2} [(1 + V^2) dx^1 + V dx^0]^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

A partir de la métrique associée (15.2), cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (13.2) \dot{x}^α par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum (dx^i)^2$. Il vient

$$(15.4) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon \varepsilon' \sqrt{\frac{(1-\beta^2)}{(V^2-\beta^2)} [V^2-\beta^2 + (1-V^2)(\beta_i \lambda^i)^2]} - \frac{(1-V^2)(\beta_i \lambda^i)}{V^2-\beta^2} \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{\frac{(1-\beta^2)}{(V^2-\beta^2)} [V^2-\beta^2 + (1-V^2)(\beta_i \lambda^i)^2]} - \frac{(1-V^2)(\beta_i \lambda^i)}{V^2-\beta^2}.$$

Si $V^2-\beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(15.5) \quad 1 - \beta^2 - (1 - \beta^2) W^2 - (1 - V^2)(1 - W \beta_i \lambda^i)^2 = 0.$$

Si on interprète \vec{V} comme vitesse absolue et \vec{W} comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée, on a manifestement

$$(15.6) \quad \vec{V}^2 = \frac{1}{1 + \vec{W} \cdot \vec{\beta}} [\vec{W}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{W} \cdot \vec{\beta} + (\vec{W} \cdot \vec{\beta})^2 - \vec{W}^2 \vec{\beta}^2].$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (13.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 = \beta^2$. C'est la formule relativiste de la composition des vitesses. Il est aisément de vérifier qu'on peut la mettre sous la forme*

$$\vec{V} = \frac{1}{1 + \vec{W} \cdot \vec{\beta}} \left[\left(1 + \frac{\vec{W} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \right) \vec{\beta} + (1 - \beta^2) \left(\vec{W} - \frac{\vec{W} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} \right) \right].$$

Nous obtenons ainsi à partir du principe de FERMAT une démonstration de la loi relativiste de la composition des vitesses.

Bibliographie

- [1] BALAZS, NANDOR L.: The propagation of light rays in moving media. Jour. Optical Soc. Amer. **45**, No. 1 (1955).
- [2] DARMOIS, G.: Les équations de la gravitation einsteinienne. Mémorial des Sc. Math. fasc. XXV (1927).
- [3] Mme FOURES: Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires. Bull. Soc. Math. France **81**, fasc. IV (1953).
- [4] GORDON, W.: Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie. Ann. Physik **72**, 421–456 (1923).
- [5] LICHNEROWICZ, A.: Sur les équations relativistes de l'Electromagnétisme. Ann. Ec. Norm. Sup. **60**, fasc. IV (1943).
- [6] LICHNEROWICZ, A.: Eléments de calcul tensoriel. Armand Colin 1951.
- [7] LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson 1955.
- [8] PHAM MAU QUAN: Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé. Jour. Rational Mechanics and Analysis **5**, No. 3, 473–538 (1956).
- [9] PHAM MAU QUAN: C. R. Ac. Sciences **242**, 465–467, 875–878 (1956).

5 rue Monticelli, Paris 14

(Manuscrit reçu le 17 avril 1957)

* Voir LICHNEROWICZ, A.: Eléments de calcul tensoriel, chap. VII, pp. 173–175.

Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten

HANSJÖRG OSER

Vorgelegt von H. GÖRTLER

§ 1. Einleitung

In einer früher erschienenen Arbeit zeigt GÖRTLER [1], daß beim Problem kleiner Schwingungen in einer gleichförmig rotierenden, inkompressiblen und reibungsfreien Flüssigkeit sich der Typus der beschreibenden Differentialgleichungen ändert beim Durchschreiten einer gewissen kritischen Frequenz der Schwingung. Bis heute fehlte aber der experimentelle Nachweis der im hyperbolischen Fall auftretenden Charakteristiken, die, von den Unstetigkeitsstellen ausgehend, das ganze Strömungsbild aufteilen. Dem Verfasser ist es in seiner Dissertation* gelungen, diesen Nachweis zu führen und die Charakteristiken fotografisch festzuhalten. Außerdem konnte ein der experimentellen Anordnung entsprechendes mathematisches Randwertproblem formuliert und exakt gelöst werden. Während der physikalische Teil Inhalt einer anderen Veröffentlichung werden soll, wird die mathematische Behandlung des Problems hier in gekürzter Form dargestellt werden.

§ 2. Die Bewegungsgleichungen

Die Eulerschen Gleichungen für die Bewegungen einer reibungsfreien, inkompressiblen Flüssigkeit lauten auf ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierendes Koordinatensystem bezogen:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p.$$

Hinzu tritt die Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Hierbei ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit, gemessen im rotierenden System, $\varrho = \text{const}$ die Dichte der Flüssigkeit und

$$p = p^* - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \varrho + \varrho g z.$$

p^* ist der statische Druck. Es gilt nun unabhängig vom Koordinatensystem die Vektorbeziehung:
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Es seien u, v, w die Geschwindigkeiten in den Richtungen $r', \varphi',$ bzw. z' eines zylindrischen Polarkoordinatensystems. Setzt man die auftretenden Relativ-

* Universität Freiburg/Breisgau, 1957

geschwindigkeiten als so klein voraus, daß die quadratischen Glieder vernachlässigbar sind, so erhalten wir, wenn der Rotationsvektor mit der z' -Achse zusammenfällt, bei Rotationssymmetrie:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r'}, \\ 2\omega u + \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial z'}, \\ \frac{1}{r'} u + \frac{\partial u}{\partial r'} + \frac{\partial w}{\partial z'} &= 0. \end{aligned}$$

Wir legen nun das folgende physikalische Problem zugrunde: In der Rotationsachse der unendlich ausgedehnten, gleichförmig um die z' -Achse rotierenden Flüssigkeit schwingt harmonisch eine Kreisplatte vom Radius r_0 auf und ab. Die Ebene der Platte soll dabei stets senkrecht zur Rotationsachse stehen, die Ruhelage der Platte sei die Ebene $z' = 0$. Beschreiben wir die Plattenschwingung durch

$$z' = -b \cos \beta t$$

und setzen $a = \beta b$, dann wird der folgende Ansatz für die Geschwindigkeitskomponente $w(r', z', t)$ nahegelegt, um die Zeit zu eliminieren:

$$w(r', z', t) = a W(r', z') \sin \beta t.$$

Setzt man dies in die Gleichungen (1) ein, so ergeben sich folgende Phasenbeziehungen zu den anderen Funktionen (m ist ein Maßstabfaktor, der noch von β und ω abhängt):

$$\begin{aligned} u(r', z', t) &= \frac{a}{m} U(r', z') \sin \beta t, \\ v(r', z', t) &= \frac{a}{m} \frac{\beta}{2\omega} V(r', z') \cos \beta t, \\ p(r', z', t) &= a \beta \varrho m r_0 P(r', z') \cos \beta t. \end{aligned}$$

Die bei den Funktionen U , V , W und P stehenden Faktoren sind so gewählt, daß diese Funktionen dimensionslos werden und unter ihnen besonders einfache Relationen entstehen. Wir bezeichnen U , V und W im folgenden kurz als Geschwindigkeiten und P als Druck.

Führt man die Ansätze für u , v , w und p in die Differentialgleichungen (1) ein und eliminiert die verschiedenen Funktionen der Reihe nach, so entstehen zwei verschiedene Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Davon gilt die eine für W und P :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\beta^2 - 4\omega^2}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right\} (W, P) = 0.$$

Die andere gilt für U und V :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{1}{r'^2} + \frac{\beta^2 - 4\omega^2}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right\} (U, V) = 0.$$

Beide Differentialgleichungen haben die Eigenschaft, elliptisch oder hyperbolisch zu sein, je nachdem ob

$$\beta \geq 2\omega.$$

Unter Beschränkung auf den hyperbolischen Fall setzen wir

$$m^2 = \frac{4\omega^2 - \beta^2}{\beta^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

wobei φ der Winkel ist, den die Charakteristikenkegel mit der Ebene $z'=0$ bilden. Zur bequemeren Rechnung führen wir dimensionslose Koordinaten ein, indem wir für $0 < \beta < 2\omega$ setzen:

$$r' = r \cdot r_0$$

$$z' = z \cdot r_0 \cdot m$$

mit der nicht wesentlichen Einschränkung, daß β von 0 und 2ω verschieden ist \star .

In den neuen Koordinaten lauten die Differentialgleichungen:

$$(1a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{array} \right\} (W, P) = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{array} \right\} (U, V) = 0.$$

Ferner wird, wie man sich durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (1) überzeugt:

$$(2) \quad U(r, z) = -\frac{1}{r} \int (r W)_z dr,$$

$$(3) \quad V(r, z) = U(r, z),$$

$$(4) \quad P(r, z) = -\int W dz.$$

Randbedingungen sind zu stellen an der Oberfläche der schwingenden Platte. Im Rahmen unserer linearisierten Theorie begehen wir keinen Fehler, wenn wir statt dessen die Randbedingungen in der Ebene $z=0$ stellen, da wir kleine Schwingungsamplituden voraussetzen.

Die Randbedingungen lauten:

$$a) \quad W(r, 0) = \begin{cases} 1 & r < 1 \\ 0 & r > 1, \end{cases}$$

$$b) \quad U(r, 0) = V(r, 0) = 0.$$

U, V, W und P sollen verschwinden für $r \rightarrow \infty$ und $z \rightarrow \infty$.

Die Anfangsbedingung soll lauten:

$$w(r, z, 0) = 0$$

(ist bereits durch den Ansatz erfüllt).

Die fehlende vierte Randbedingung (für den Druck P) wird ersetzt durch die

Symmetriebedingung: $W(z) = W(-z)$ für alle r .

Hierzu äquivalent ist die Bedingung, daß der Druck in $z=0$ verschwindet.

Die Lösungen sollen überall eindeutig und regulär sein, ausgenommen auf Charakteristiken.

\star Für $\beta=0$ liegt überhaupt keine Störung mehr vor, während für $\beta=2\omega$ die Lösungen sich so sehr vereinfachen (parabolischer Grenzfall), daß keine physikalisch sinnvollen Randbedingungen mehr erfüllt werden können. Dort müssen die nicht-linearen Gleichungen untersucht werden.

§ 3. Lösung des Randwertproblems

Da die Randbedingungen auf Koordinatenflächen vorliegen, wird ein Separationsansatz für die Funktionen U, V, W und P nahegelegt. Schließen wir die in der Rotationsachse singulären Lösungsbestandteile von vornherein aus, so erhalten wir für W die partikuläre Lösung

$$J_0(kr) (A_1 \cos kz + B_1 \sin kz)$$

und für U und V ganz entsprechend:

$$J_1(kr) (A_2 \cos kz + B_2 \sin kz).$$

Hierbei sind J_0 und J_1 die Besselschen Funktionen erster Art, A_i und B_i sind Koeffizienten, die noch von der Separationskonstanten k abhängen können. Die Symmetriebedingung liefert sofort $B_1 = 0$, das partikuläre Integral für W lautet also:

$$J_0(kr) A_1(k) \cos kz.$$

Wir integrieren nun über k von 0 bis ∞ und verfügen über $A_1(k)$ so, daß die Randbedingung für $W(r, 0)$ erfüllt wird. Es soll also sein:

$$W(r, 0) = \int_0^\infty J_0(kr) A_1(k) dk = \begin{cases} 0 & r > 1 \\ 1 & r < 1. \end{cases}$$

Nun gilt aber die Beziehung \star :

$$\int_0^\infty J_0(kr) J_1(k) dk = \begin{cases} 0 & r > 1 \\ 1 & r < 1. \end{cases}$$

Die Funktion $J_1(k)$ ist die einzige Lösung für $A_1(k)$, denn wenn es eine zweite gäbe, müßte man mit der Differenz die Randbedingung $W(r, 0) = 0$ für alle r erfüllen können. Aus der Fourier-Besselschen Darstellung einer beliebigen Funktion $\star\star$ folgt aber dann, daß diese Differenz null sein muß, also wirklich nur eine Lösung existieren kann. Damit wird also:

$$(5) \quad W(r, z) = \int_0^\infty J_0(kr) J_1(k) \cos(kz) dk.$$

Durch Anwendung der Beziehungen (2) bis (4) ergibt sich daraus für die übrigen Funktionen:

$$(6) \quad U(r, z) = \int_0^\infty J_1(kr) J_1(k) \sin(kz) dk,$$

$$(7) \quad V(r, z) = \int_0^\infty J_1(kr) J_1(k) \sin(kz) dk,$$

$$(8) \quad P(r, z) = - \int_0^\infty \frac{1}{k} J_0(kr) J_1(k) \sin(kz) dk.$$

Durch die angegebenen Ausdrücke werden sämtliche Randbedingungen im Endlichen erfüllt. Daß die Funktionen im Unendlichen alle verschwinden, wird in § 4 gezeigt werden.

\star WATSON [2], S. 406

$\star\star$ SOMMERFELD [3], S. 112

1. Die Funktionen U und V . Die Fourier-Integrale (6) und (7), welche U und V darstellen, können geschlossen ausgeführt und durch bekannte Funktionen dargestellt werden. Durch Spezialisierung einer allgemeineren Transformation* ergibt sich folgendes:

$$U = V = \begin{cases} 0 & 0 < z < |1-r| \\ \frac{1}{2\sqrt{r}} P_{\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+1-z^2}{2r}\right) & |1-r| < z < 1+r \\ -\frac{1}{\pi\sqrt{r}} Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2-r^2-1}{2r}\right) & 1+r < z < \infty. \end{cases}$$

$P_{\frac{1}{2}}$ und $Q_{\frac{1}{2}}$ sind gewöhnliche Kugelfunktionen erster und zweiter Art, was man auch bestätigen kann, wenn man mit $x = (r^2+1-z^2)/2r$ in die Differentialgleichung (1a) eingeht und dann die Differentialgleichung der Kugelfunktionen vom Index $\frac{1}{2}$ erhält. Die Darstellungen für U und V gelten zunächst nur für $r \neq 0$ und $r \neq 1$. Die Grenzwerte für $r = 1-0$ und $r = 1+0$ sind aber gleich und ebenso die Ableitungen an dieser Stelle, so daß die Funktionen dort sogar analytisch sind. Für $r=0$ ergibt sich aus der Darstellung (6) sofort:

$$U(0, z) = V(0, z) = 0$$

mit Ausnahme von $z=1$, wo das Integral nicht konvergiert.

2. Die Funktion W . Für $J_0(kr) J_1(k)$ ist die Fouriertransformierte leider nicht in geschlossener Form bekannt. Deshalb muß auf eine Darstellung durch elementare Funktionen verzichtet werden, wie es für U und V möglich war. Für gewisse Bereiche der Variablen können aber auch bei der Funktion W Aussagen gemacht werden. Es ist für $r=0$ $**$

$$W(0, z) = \int_0^\infty J_1(k) \cos(kz) dk = \begin{cases} 1 & 0 < z < 1 \\ -\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} - 1\right) & 1 < z < \infty. \end{cases}$$

Geeignete Spezialisierung zweier allgemeiner Beziehungen $***$ ergibt ferner aus dem Integral (5):

$$\begin{aligned} W(r, z) &= 1 & \text{für} & \quad 0 < z < 1-r \quad (r < 1) \\ W(r, z) &= 0 & \text{für} & \quad 0 < z < r-1 \quad (r > 1). \end{aligned}$$

Damit sind bereits zwei wesentliche Feststellungen möglich:

a) Der kegelförmige Bereich IV über der Platte (s. Abb. 1) besitzt nur eine Geschwindigkeitskomponente in vertikaler Richtung. *Die Flüssigkeit schwingt hier genau (d.h. nach Amplitude und Phase) mit der Platte.*

b) Der Bereich I ist völlig störungsfrei. Hier ist $U = V = W = 0$.

* OBERHETTINGER [4], S. 169

** ERDÉLYI [5] Gl. 1.12.3

*** ERDÉLYI [5] Gln. 1.12.26 und 1.12.25

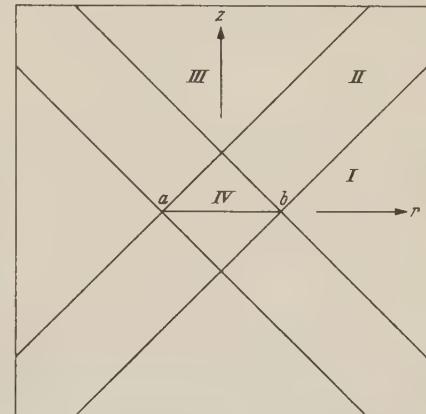


Abb. 1. Charakteristiken bei einer rotationssymmetrischen ebenen Störung im Schnitt

In den Bereichen II und III ist zunächst nichts zu erfahren über die Funktion W . Der Weg zu ihrer numerischen Berechnung wird in § 5 angegeben.

3. Der Druck P . Auch hier sind allgemeine Aussagen nur in den Bereichen I und IV und auf der Rotationsachse möglich. Die endgültige Berechnung von P haben wir wie bei W daher nach § 5 verschoben. Es ist^{*}:

a) für $r=0$:

$$P(0, z) = \begin{cases} -z & 0 < z < 1, \\ \dots (z - \sqrt{z^2 - 1}) & 1 < z < \infty. \end{cases}$$

b) im Bereich IV über der Platte:

$$P(r, z) = -z \quad 0 < z < 1 - r \quad (r < 1)$$

c) im störungsfreien Bereich I:

$$P(r, z) = 0 \quad 0 < z < r - 1 \quad (r > 1).$$

Bei diesen Fallunterscheidungen treten die Charakteristiken $z=1-r$, $z=r-1$ und $z=1+r$ jeweils als Grenzen der Gültigkeitsbereiche auf. Man erfährt daher nichts über die Funktionen auf den Charakteristiken selbst. Wir werden aber in § 6 die Umgebung der Charakteristiken genauer untersuchen.

§ 4. Die Erfüllung der Randbedingungen im Unendlichen

Es fehlt bisher noch der Nachweis, daß die angegebenen Lösungen im Unendlichen verschwinden, was man zwar aus dem bisher Gewonnenen schon vermuten kann, was aber noch keineswegs bewiesen ist. Für $r \rightarrow \infty$ erübrigt sich ein Beweis: Alle Funktionen verschwinden für $r > z + 1$ identisch. Um das Verschwinden der Funktionen U und V für $z \rightarrow \infty$ zu zeigen, können wir von ihrer Darstellung als Kugelfunktionen ausgehen. Es ist für $z > r + 1$:

$$U(r, z) = V(r, z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{r}} Q_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z^2 - r^2 - 1}{2r}\right).$$

Nun gilt für $Q_{\frac{1}{2}}(x)$ in der Umgebung von $x = \infty$

$$Q_{\frac{1}{2}}(x) \approx \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $z \rightarrow \infty$ ergibt sich also:

$$U(r, z) = V(r, z) \approx -r/z^3.$$

Um das Verschwinden der Funktion $W(r, z)$ für $z \rightarrow \infty$ zu zeigen, müssen wir auf die Integraldarstellung (5) zurückgreifen. Wir werden gleichzeitig die Existenz des Integrales (5) mit aufzeigen. Zu diesem Zweck spalten wir (5) in folgender Weise auf:

$$(*) \quad W(r, z) = \int_0^m \dots dk + \int_m^\infty \dots dk.$$

Die Aufspaltung erfolgt so, daß beim Eintragen des ersten Gliedes der asymptotischen Entwicklung der Besselfunktionen der Fehler für $k > m$ unter einer festen

* ERDÉLYI [5] Gl. 2.12.5, 2.12.28 und 2.12.29

Schranke bleibt. Das erste Integral wird durch partielle Integration umgeformt:

$$(**) \quad \int_0^m \dots dk = \frac{1}{z} J_0(kr) J_1(k) \sin kz \Big|_{k=0}^{k=m} - \frac{1}{z} \int_0^m dk (J_0(kr) J_1(k)) \sin kz dk.$$

Das letzte Integral existiert und hat einen endlichen Wert. Es ist nämlich

$$\frac{d}{dk} (J_0(kr) J_1(k)) = -r J_1(kr) J_1(k) + J_0(kr) J_0(k) - \frac{1}{k} J_0(kr) J_1(k)$$

eine im Intervall $0 \leq k \leq m$ stetige (und damit beschränkte) Funktion \star . Daher sind bei beliebigem endlichem m alle Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung $(**)$ beschränkt. Für $z \rightarrow \infty$ geht also die rechte Seite gegen Null. Es bleibt weiter zu zeigen, daß auch das zweite Integral von Gleichung $(*)$ verschwindet für $z \rightarrow \infty$. Man trägt das erste Glied der asymptotischen Entwicklungen für $J_0(kr)$ und $J_1(k)$ in dieses Integral ein und erhält nach einigen trigonometrischen Umformungen (für $z > r+1$):

$$\begin{aligned} \int_m^\infty \dots dk &= \frac{2}{\pi \sqrt{r}} \int_m^\infty \frac{\cos(kr - \pi/4) \cos(k - 3\pi/4) \cos kz}{k} dk, \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \{ Ci[m(r+z+1)] + Ci[m(r-z-1)] + \\ &\quad + si[m(r+z-1)] - si[m(z-r+1)] \}. \end{aligned}$$

Bei beliebigem, aber festem $m > 0$ gehen die Funktionen $Ci(mz)$ und $si(mz)$ gegen Null für $z \rightarrow \infty$ $\star\star$.

Es ist damit nicht nur die Erfüllung der Randbedingung im Unendlichen gezeigt, sondern zugleich die Existenz des Integrals bewiesen, weil für festes r und z ($\neq r+1$) das Restglied beliebig klein gemacht werden kann. Der Beweis für die anderen Integrale (6) bis (8) läuft genau entsprechend. Im Zwischengebiet $|r-1| < z < r+1$ tritt nur eine unwesentliche Vorzeichenänderung bei den Argumenten der Funktionen $Ci(x)$ und $si(x)$ auf. Man sieht weiter, daß für $z=r+1$ die Funktion W unendlich werden muß, da $Ci(0) = -\infty$ ist.

Um das Verschwinden der Funktion $P(r, z)$ für $z \rightarrow \infty$ zu zeigen, können wir einen Satz aus der Theorie der Fourierschen Integrale benutzen. Er lautet $\star\star\star$:

Ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

dann konvergieren die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos zx dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin zx dx$$

gegen Null für $z \rightarrow \infty$.

Die Voraussetzung ist für unsere Funktion $P(r, z)$ erfüllt. Wir zeigen dies, indem wir das betreffende Integral (8) wieder aufspalten:

$$\int_0^\infty \dots dk \leq \int_0^m \left| \frac{1}{k} J_0(kr) J_1(k) \right| dk + \int_m^\infty \left| \frac{1}{k} J_0(kr) J_1(k) \right| dk.$$

\star Die Entwicklung von $J_1(k)$ beginnt mit $k/2$

$\star\star$ Man vergleiche JAHNKE-EMDE [6], S. 3

$\star\star\star$ TITCHMARSH [7], S. 11

Das erste Integral existiert wegen der Stetigkeit des Integranden und hat einen endlichen Wert. Das zweite Integral konvergiert, weil der Integrand überall beschränkt ist und für $k \rightarrow \infty$ wie $1/k^2$ abnimmt. Um in völligen Einklang mit der Voraussetzung zu kommen, müssen wir $f(x) = 0$ setzen für $x < 0$. Dann folgt die Behauptung, daß $P(r, z)$ verschwindet für $z \rightarrow \infty$.

§ 5. Numerische Berechnung der Funktionen

Die Funktionen U und V sind durch die halbzahligen Kugelfunktionen $P_{\frac{1}{2}}(\cos \vartheta)$ und $Q_{\frac{1}{2}}(x)$ ($x > 1$) ausgedrückt. Nun stehen für diese leider nur Tafeln für $x > 1$ zur Verfügung, so daß die Darstellung durch die Funktion $P_{\frac{1}{2}}(\cos \vartheta)$ nur einen formalen Gewinn bedeutet. Wir können diese Funktion aber durch elliptische Integrale darstellen:

$$(9) \quad P_{\frac{1}{2}}(x) = P_{\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} [2E(k^2) - K(k^2)].$$

Auch für die im folgenden noch auftretende Funktion $P_{-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta)$ ist eine solche Darstellung möglich:

$$(10) \quad P_{-\frac{1}{2}}(x) = P_{-\frac{1}{2}}(\cos \vartheta) = \frac{2}{\pi} K(k^2).$$

Dabei sind $K(k^2)$ und $E(k^2)$ die sog. vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung und

$$k^2 = \frac{1 - \cos \vartheta}{2} = \frac{1 - x}{2}.$$

Die angegebenen Beziehungen können sehr leicht bestätigt werden, wenn man die in Frage stehenden Funktionen durch die hypergeometrische Funktion darstellt und Potenzreihenvergleich anstellt. Es ist mit $F = {}_2F_1$

$$(11) \quad \begin{aligned} P_n(x) &= F\left(-n; n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \\ K(k^2) &= \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \\ E(k^2) &= \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \end{aligned}$$

Damit sind $U(r, z)$ und $V(r, z)$ tatsächlich auf Funktionen zurückgeführt, die vertafelt vorliegen.

Die Berechnung von $W(r, z)$ und $P(r, z)$ geht nun zweckmäßigerweise nicht von den Integralen (5) und (8) aus, da die numerische Auswertung dieser unendlichen Integrale in Abhängigkeit von zwei Parametern einen beträchtlichen Aufwand erfordern würde. Wir führen diese Funktionen vielmehr mittels der Beziehungen (2) und (4) auf $U(r, z)$ zurück. Die Differentiation in (2) kann auf die Kugelfunktion ausgeübt und das Ergebnis daher wieder analytisch dargestellt werden. Es bleibt somit nur eine numerische Integration für W und eine weitere für P zu leisten übrig. Da numerische Integrationsverfahren im allgemeinen gegenüber Rundungsfehlern recht unempfindlich sind, kann mit einem mäßigen Stellenaufwand gerechnet werden. Es ist nach (2):

$$W = -\frac{1}{r} \int_r^z (r U)_r dz.$$

Die untere Grenze bleibt unbestimmt. Setzen wir sie gleich $r-1$, dann müssen wir eine Funktion $f(r)$ als Integrationskonstante hinzufügen. Wir haben sie durch Auswerten des Integrals (5) für verschiedene Werte von r bestimmt. In § 6 werden wir durch eine Grenzbetrachtung $\lim_{z \rightarrow r} \lim_{1 \rightarrow 0} W(r, z) = f(r)$ exakt bestimmen. Setzen wir U in (2) ein und beachten die Differentiationsregel für die Kugelfunktionen, so erhalten wir für

a) $|r-1| < z < r+1$

$$(12) \quad W = -\frac{1}{4\pi r \sqrt{r}} \int \frac{(1-rx) P_{\frac{1}{2}}(x) + (r-x) P_{-\frac{1}{2}}(x)}{1-x^2} dz.$$

Führen wir gemäß (11) die elliptischen Integrale ein und setzen außerdem noch

$$\frac{K-E}{k^2} = D$$

(auch diese Funktion ist in den Tafeln der elliptischen Normalintegrale enthalten), so ergibt sich schließlich:

$$(13) \quad W = -\frac{1}{4\pi r \sqrt{r}} \int \left\{ \frac{2E}{1-k^2} + (r-1) \left[D + \frac{E}{1-k^2} \right] \right\} dz \text{ mit } k^2 = \frac{z^2 - (r-1)^2}{4r}.$$

$P(r, z)$ erhalten wir durch nochmalige Integration von $-W$ nach z .

b) $1+r < z < \infty$. Mit $y = \frac{z^2 - r^2 - 1}{2r}$ erhalten wir ganz entsprechend:

$$(14) \quad W = \frac{1}{2\pi r \sqrt{r}} \int \frac{(r+y) Q_{-\frac{1}{2}}(y) - (1+ry) Q_{\frac{1}{2}}(y)}{y^2 - 1} dz.$$

Für die numerische Auswertung günstiger ist die Darstellung:

$$(15) \quad W = \frac{1}{2\pi r \sqrt{r}} \int \left\{ \frac{Q_{-\frac{1}{2}} - Q_{\frac{1}{2}}}{y-1} + (r-1) \frac{Q_{-\frac{1}{2}} - yQ_{\frac{1}{2}}}{y^2 - 1} \right\} dz.$$

$P(r, z)$ wird wieder nach Gleichung (4) berechnet.

Bei der numerischen Berechnung nach (13), (14) und (15) wurde die untere Grenze der Integrale jeweils $r-1$ gesetzt. Um die Integrationskonstante (die eine Funktion von r ist) zu bestimmen, mußten wir die Integrale

$$(5) \quad W = \int_0^\infty J_0(kr) J_1(k) \cos(kz) dk,$$

$$(8) \quad P = - \int_0^\infty \frac{1}{k} J_0(kr) J_1(k) \sin(kz) dk$$

für $r = 1, 2, \dots, 10$ für je ein $z < r+1$ und $z > r+1$ numerisch auswerten. Dabei wurde folgendermaßen vorgegangen: Die Integranden wurden vertafelt im Intervall

$$k: \quad 0 \text{ (0.1) } 10 \text{ bei } W$$

$$k: \quad 0 \text{ (0.1) } 7 \text{ bei } P \text{ (bessere Konvergenz)}$$

und nach der Simpsonschen Regel integriert. Der Rest wurde durch Eintragen der asymptotischen Entwicklungen der Besselschen Funktionen in den

betreffenden Integralen abgeschätzt zu:

$$R_W(m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \left\{ Ci[m(z+r+1)] + Ci(m(r+1-z)) + \right. \\ \left. + si(m(r-1+z)) - si(m(z-r+1)) \right\},$$

$$R_P(m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \left\{ (z+r+1) \left[Ci(m(z+r+1)) - \frac{\sin(m(z+r+1))}{m(r+z+1)} \right] - \right. \\ \left. - (r+1-z) \left[Ci(m(r+1-z)) - \frac{\sin(m(r+1-z))}{m(r+1-z)} \right] + \right. \\ \left. + (z+r-1) \left[si(m(z+r+1)) + \frac{\cos[m(z+r+1)]}{m(z+r-1)} \right] - \right. \\ \left. - (z-r+1) \left[si(m(z-r+1)) + \frac{\cos[m(z-r+1)]}{m(z-r+1)} \right] \right\}.$$

Für die Funktion W war es möglich, auf Grund der in § 6 angestellten Untersuchungen die Funktion $f(r)$, welche die Rolle der Integrationskonstanten vertritt, analytisch herzuleiten. Die Übereinstimmung mit der numerisch gewonnenen Funktion war bis auf wenige Promille genau.

Eine Schwierigkeit bei der numerischen Behandlung von (13) bis (15) ist noch zu erwähnen: Die Funktionen U, V, W werden alle unendlich bei $z=r+1$. Beim Integrieren über diese Stelle hinweg muß daher verlangt werden, daß entweder die Singularität so schwach ist, daß sie integrierbar ist, oder aber die beiden unendlichen Beträge müssen sich gegenseitig wegheben, wenn man darüber hinwegintegriert. Es liegt hier der letztere Fall vor. Da wir, bedingt durch die Vertafelung, nicht von beiden Seiten gleich nahe an die singuläre Stelle herankommen, müssen wir diesen Beitrag berücksichtigen. Zur numerischen Erfassung dieser Unsymmetrie gehen wir zweckmäßigerweise von (12) und (14) aus, da die Handhabung der Kugelfunktionen am leichtesten ist.

$$W = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\sqrt{r}} \int^z \frac{(1-rx)P_{\frac{1}{2}}(x) + (r-x)P_{-\frac{1}{2}}(x)}{1-x^2} dz & (z < 1+r), \\ -\frac{1}{2\pi r\sqrt{r}} \int^z \frac{(r-x)Q_{-\frac{1}{2}}(-x) - (1-rx)Q_{\frac{1}{2}}(-x)}{1-x^2} dz & (z > 1+r). \end{cases}$$

Hier haben wir $-x$ statt y gesetzt. Für $z \rightarrow r+1$ geht $x \rightarrow -1$. Wir werden demnach $P_{\frac{1}{2}}$ und $P_{-\frac{1}{2}}$ durch die asymptotischen Entwicklungen um -1 , die Funktionen $Q_{\frac{1}{2}}$ und $Q_{-\frac{1}{2}}$ durch die Entwicklungen um $+1$ ersetzen und anschließend den Cauchyschen Hauptwert des Integrals zwischen $1+r-\varepsilon_1$ und $1+r+\varepsilon_2$ bestimmen. Wir erhalten so die Korrekturgrößen:

$$\Delta_W = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \log \varepsilon_2/\varepsilon_1,$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \log \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \log \varepsilon_2\}.$$

Mit Hilfe dieser Korrekturen war es dann möglich, W und P bis etwa $z=12$ (Tafelgrenzen) zu berechnen.

§ 6. Die Umgebung der Charakteristiken

Von besonderem Interesse ist das Verhalten der Lösungen in der Nachbarschaft der Charakteristiken. Leider geben die numerischen Lösungen dort keine

feineren Einzelheiten wieder, so daß wir analytische Untersuchungsmethoden heranziehen müssen.

Setzen wir in die Integrale (6) und (5) die folgenden Beziehungen ein*:

$$J_1(kr) J_1(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(k\omega) \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$J_0(kr) J_1(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J_1(k\omega)}{\omega} (1 - r \cos \varphi) \, d\varphi$$

mit

$$\omega^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \varphi.$$

Wegen der Existenz der Integrale (6) und (5) können wir die Integrationsfolge nach φ und k vertauschen und erhalten:

$$(16) \quad U = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \varphi \left(\int_0^\infty J_0(k\omega) \sin kz \, dk \right) d\varphi,$$

$$(16a) \quad W = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{\omega} \left(\int_0^\infty J_1(k\omega) \cos kz \, dk \right) d\varphi.$$

Da der Integrand nur von $\cos \varphi$, nicht aber anderweitig von φ abhängt, kann die Integration auf das Intervall von 0 bis π beschränkt werden. Die Integration nach k läßt sich nun in den Integralen (16) und (16a) geschlossen ausführen. Es gilt:

$$\int_0^\infty J_0(k\omega) \sin kz \, dk = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z^2 - \omega^2}} & \omega < z \\ 0 & \omega > z, \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_1(k\omega) \cos kz \, dk = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - \omega^2}} \right) & \omega < z \\ \frac{1}{\omega} & \omega > z. \end{cases}$$

Bei der Integration über φ läuft ω von $|r-1|$ bis $r+1$. Für $z < |r-1|$ erhalten wir also wieder die früheren Ergebnisse:

$$1) \quad U = 0 \quad \text{für } z < |r-1|,$$

$$2) \quad W = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{\omega^2} \, d\varphi = \begin{cases} 1 & r < 1, \\ 0 & r > 1. \end{cases}$$

Für $|1-r| < z < 1+r$ erhalten wir mit $\omega(\varphi_0) = z$

$$(17) \quad U = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{z^2 - \omega^2}} \, d\varphi,$$

$$(18) \quad W = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{1 - r \cos \varphi}{\omega^2 \sqrt{z^2 - \omega^2}} \, d\varphi & r < 1 \\ - \frac{z}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{1 - r \cos \varphi}{\omega^2 \sqrt{z^2 - \omega^2}} \, d\varphi & r > 1. \end{cases}$$

* SZEGÖ [8], S. 423ff.

Für $1+r < z < \infty$ ist $\varphi_0 = \pi$ zu setzen.

1. Die Charakteristiken $z = 1-r$ und $z = r-1$.

Aus den Darstellungen (18) erhalten wir durch Grenzbetrachtung, wenn wir $z = 1-r + \varepsilon$ bzw. $z = r-1 + \varepsilon$ einsetzen und im Integranden nur Glieder erster Ordnung in ε berücksichtigen:

$$\lim_{z \rightarrow 1-r+0} W(r, z) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{r}},$$

$$\lim_{z \rightarrow r-1+0} W(r, z) = \frac{1}{2\sqrt{r}}.$$

Für U ergibt sich nach S. 85:

$$\lim_{z \rightarrow 1-r+0} U(r, z) = \lim_{z \rightarrow r-1+0} U(r, z) = \frac{1}{2\sqrt{r}}.$$

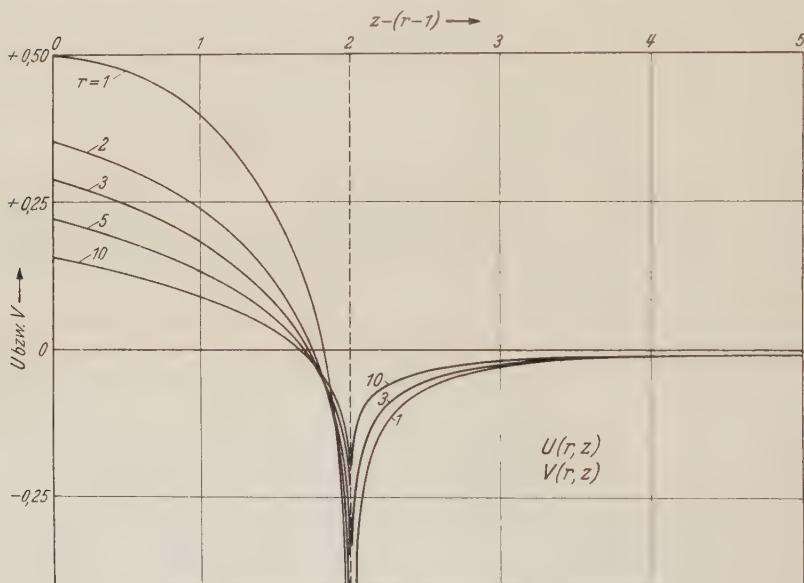


Abb. 2. Die Funktionen U und V in Abhängigkeit von $z - (r-1)$

Nähert man sich also von oben her den Charakteristiken, so erhält man als Steigung der Stromlinien:

$$z = 1-r+0: \quad W/U = 2\sqrt{r}-1,$$

$$z = r-1+0: \quad W/U = 1.$$

Beim Überschreiten der beiden Charakteristiken bleibt der Druck P stetig, dagegen erleidet seine Ableitung einen Sprung.

2. Die Charakteristik $z = 1+r$.

Alle Geschwindigkeitsfunktionen U, V, W werden hier unendlich und verhalten sich in dieser Umgebung asymptotisch wie:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{r}} \log |z - (r+1)|.$$

Man leitet sich dies leicht aus den Beziehungen des § 5 her. Der Druck ist auch hier wieder stetig, hat aber eine unendliche Ableitung, was man der Darstellung

$$P(r, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{r}} (1 + r - z) \{ \log(r + 1 - z) - 1 \} + \dots$$

entnehmen kann. Durch die Punkte sind weitere reguläre Glieder angedeutet.

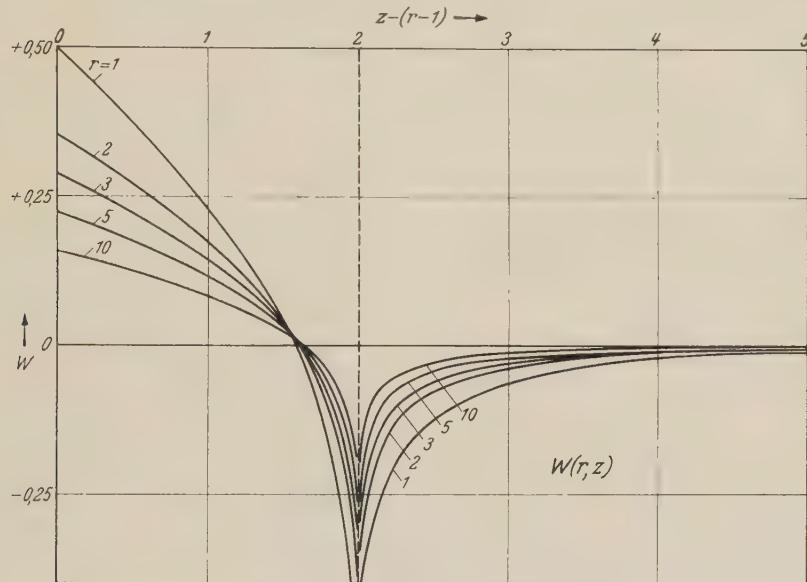


Abb. 3. Die Funktion W in Abhängigkeit von $z - (r - 1)$

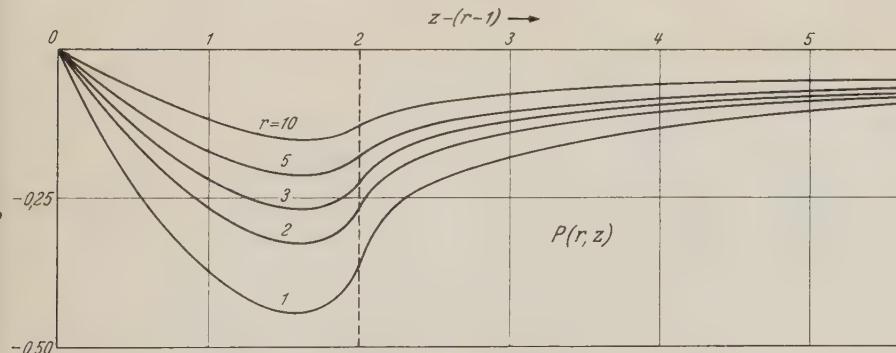


Abb. 4. Die Funktion P in Abhängigkeit von $z - (r - 1)$

Wir stellen also fest, daß in der Umgebung der Charakteristik $z = 1 + r$ die Voraussetzung kleiner Geschwindigkeiten nicht mehr erfüllt ist. Die Linearisierung der Differentialgleichungen ist also zumindest in dieser Umgebung nicht statthaft. Jedoch werden hier nicht nur die Trägheitsglieder, sondern vielmehr auch die Zähigkeitsglieder der allgemeinen Navier-Stokeschen Gleichungen wirksam werden. Am stärksten ins Gewicht fallen werden diese Einflüsse in der Nachbarschaft des Punktes $(0, 1)$ — dem Schnittpunkt der Charakteristiken — weil hier zur logarithmischen Singularität noch die algebraische $r^{-\frac{1}{2}}$ hinzutritt.

Obenstehend sind die Funktionen U, V, W und P graphisch dargestellt. Als Abszisse wurde $z - (r - 1)$ gewählt. Auf diese Weise rücken die Unstetigkeiten in die Abszissen 0 und 2 (für $r > 1$).

§ 7. Die Stromfunktion

Für rotationssymmetrische Probleme wird die Stromfunktion folgendermaßen definiert:

$$U = -\frac{1}{r} \Psi_z, \quad W = +\frac{1}{r} \Psi_r.$$

Aus den bekannten Funktionen U und W ergeben sich die Richtungselemente der Stromlinien $\Psi = \text{const}$ sehr einfach zu

$$dz/dr = -\Psi_r/\Psi_z = W/U.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung wurde $\Psi = \text{const}$ graphisch aus den Richtungselementen aufgebaut. Die Abb. 5 eingezeichneten Pfeile entsprechen der momen-

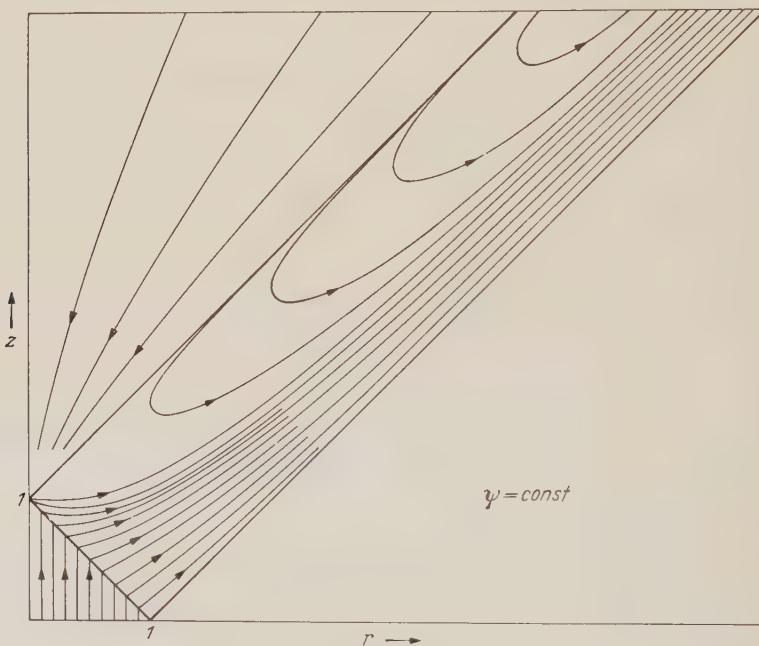


Abb. 5. Die Stromfunktion $\psi(r, z) = \text{const}$

tanen Strömung bei Aufwärtsbewegung der Platte. Die Stromlinienabstände sind willkürlich gewählt und bedeuten nicht, daß überall dieselben Durchflußmengen vorliegen.

Offen ist noch die Frage, ob im Punkt $(0, 1)$ die Kontinuität erfüllt ist, weil dort unendlich viele Stromlinien ein- und auslaufen. Um den Kontinuitätsbeweis zu erbringen, wollen wir eine geschlossene Fläche um den Punkt $(0, 1)$ legen und den gesamten Durchfluß durch diese Fläche berechnen. Wir wählen hierfür den Zylinder, der die schwingende Platte als Grundfläche und die Fläche $r = 1$ als Mantel hat. Die Deckfläche soll bei $z = \infty$ liegen. Rechnen wir Einströmung negativ und Ausströmung positiv, so erhalten wir:

1) Grundfläche

$$Q_1 = \iint (-W) d\vartheta dz = -\pi,$$

2) Mantelfläche von $z=0$ bis $z=2$.

$$Q_2 = \iint U d\vartheta dz.$$

Mit

$$U = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{z^2 - \omega^2}} d\varphi$$

und

$$d\vartheta = r d\vartheta dz$$

ergibt sich, wenn man die Winkelintegration mit einem Faktor 2π berücksichtigt, sofort für $r=1$:

$$Q_2 = 2 \int_0^2 \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{z^2 - 2 + 2 \cos \varphi}} d\varphi dz.$$

Man setzt $\cos \varphi = 2 \cos^2 \varphi/2 - 1$ und kann das innere Integral sogleich ausführen *

$$Q_2 = 2 \int_0^2 (2E(\alpha, \pi/2) - F(\alpha, \pi/2)) dz \quad (k = \sin \alpha).$$

Hierbei sind E und F unvollständige elliptische Integrale, die wegen des Argumentes $\pi/2$ in die vollständigen elliptischen Integrale $E(k^2)$ und $K(k^2)$ übergehen **. Dann wird (mit $k=z/2$)

$$\begin{aligned} Q_2 &= 4 \int_0^1 [2E(k^2) - K(k^2)] dk, \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{E}{k} - k D \right) dk = 4k E(k^2) \Big|_0^1 = 4. \end{aligned}$$

3) Mantelfläche von $z=2$ bis $z=\infty$.

$$Q_3 = 2 \int_2^\infty \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{z^2 - 2 + 2 \cos \varphi}} d\varphi dz.$$

Hier wurde die Winkelintegration schon mit einem Faktor 2π berücksichtigt. Man findet ganz entsprechend wie im Fall 2):

$$Q_3 = 2 \int_2^\infty \left\{ z [E(\alpha, \pi/2) - (1 - k^2) F(\alpha, \pi/2)] - \frac{2}{z} F(\alpha, \pi/2) \right\} dz.$$

Hier ist $k = \sin \alpha = 2/z$. Beim Übergang zu den vollständigen elliptischen Integralen ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_3 &= 2 \int_2^\infty \left\{ \frac{2}{k} [E(k^2) - (1 - k^2) K(k^2)] - k K(k^2) \right\} dz, \\ &= 2 \int_0^1 C(k^2) dk = -4 B(k^2) \Big|_0^1 = -4 + \pi. \end{aligned}$$

* MEYER ZUR CAPELLEN [11], S. 185ff.

** JAHNKE-EMDE [6], S. 55

4) Die Deckfläche $z = \infty$ liefert keine Einströmung, da dort W verschwindet. Es ist:

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.$$

Damit ist die Frage, ob im Punkt $(0, 1)$ Flüssigkeit verschwindet oder neu entsteht, beantwortet: Es fließt genau so viel Flüssigkeit ein, wie von dort ausläuft. Die von der Platte her in den Zylinder einströmende Flüssigkeit fließt vom Kegelmantel $z = 1 - r$ wieder ab. Zwischen den Charakteristiken $z = r - 1$ und $z = r + 1$ können wir daher drei Bereiche unterscheiden. Rechnen wir alles auf dem Zylindermantel $r = 1$, dann fließt zwischen $z = 0$ und $z = z_1$ die von der Platte herkommende Flüssigkeit. Zwischen z_1 und z_2 strömt die von oben in die Kegelspitze fließende Flüssigkeit. Zwischen $z = z_2$ und $z = 2$ ist der Durchfluß insgesamt null: alle Stromlinien biegen um und verlassen den Zylinder wieder. Da Q_2 in Abhängigkeit von z gegeben ist, kann z_1 und z_2 aus den Gleichungen

$$Q_2(k_1) = 4k_1 E(k_1^2) = \pi,$$

$$Q_2(k_2) = 4k_2 E(k_2^2) = 4.$$

bestimmt werden. Es ergibt sich

$$z_1 = 1.076 \quad \text{und} \quad z_2 = 1.180.$$

In Abb. 5 sind diese beiden Trennstromlinien gezeichnet. Die untere hat die Steigung -1 im Punkt $(0, 1)$, die obere beginnt mit einer Steigung von 0.12 (Näherungsrechnung).

Literatur

- [1] GÖRTLER, H.: Einige Bemerkungen über Strömungen in rotierenden Flüssigkeiten. ZAMM **24**, 210 (1944).
- [2] WATSON, G. N.: A treatise on Bessel Functions. Cambridge University Press 1952.
- [3] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI. Dieterichsche Verlagsbuchhandlung 1947.
- [4] OBERHETTINGER, F.: Tabellen zur Fouriertransformation. Springer-Verlag 1957.
- [5] ERDÉLYI, A. et al.: Tables of Integral Transforms, Vol. I. McGraw-Hill 1954.
- [6] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen. Teubnersche Verlagsgesellschaft 1948.
- [7] TITCHMARSH, E. C.: Introduction to the theory of Fourier Integrals. Clarendon Press 1950.
- [8] SZEGÖ, G.: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Teubner-sche Verlagsgesellschaft 1930.
- [9] MORGAN, G. W.: A study of motions in a rotating fluid. Proc. Roy. Soc. A **206**, 108 (1951).
- [10] SQUIRE, H. B.: Rotating Fluids, Aus: Surveys in Mechanics. Herausgeber: G. K. Batchelor u. R. M. Davies. Cambridge University Press 1956.
- [11] MEYER ZUR CAPELLEN: Integraltafeln. Springer-Verlag 1950.

Mathematisches Institut der Universität Freiburg/Breisgau

(Eingegangen am 5. April 1957)

EDITORIAL BOARD

S. BERGMAN

Applied Mathematics
and Statistics Laboratory
Stanford University, California

R. BERKER

Technical University
Istanbul

L. CESARI

Purdue University
Lafayette, Indiana

L. COLLATZ

Institut für angewandte Mathematik
Universität Hamburg

J. L. ERICKSEN

The Johns Hopkins University
Baltimore, Maryland

A. ERDÉLYI

California Institute of Technology
Pasadena, California

IRMGARD FLÜGGE-LOTZ

Stanford University
California

HILDA GEIRINGER

Harvard University
Cambridge, Massachusetts

H. GÖRTLER

Institut für angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.

D. GRAFFI

Istituto Matematico „Salvatore Pincherle“
Università di Bologna

A. E. GREEN

King's College
Newcastle-upon-Tyne

J. HADAMARD

Institut de France
Paris

H. LEWY

University of California
Berkeley, California

A. LICHNEROWICZ

Collège de France
Paris

C. C. LIN

Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Massachusetts

C. LOEWNER

Applied Mathematics
and Statistics Laboratory
Stanford University, California

W. MAGNUS

Institute of Mathematical Sciences
New York University
New York City

G. C. McVITTIE

University of Illinois Observatory
Urbana, Illinois

J. MEIXNER

Institut für theoretische Physik
Technische Hochschule Aachen

C. MIRANDA

Istituto di Matematica
Università di Napoli

C. MÜLLER

Rhein.-Westf. Technische Hochschule
Aachen

A. OSTROWSKI

Mathematische Anstalt der Universität
Basel

R. S. RIVLIN

Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, Rhode Island

M. M. SCHIFFER

Stanford University
California

E. STERNBERG

Division of Applied Mathematics
Brown University
Providence, Rhode Island

W. TOLLMIEN

Max-Planck-Institut
für Strömungsforschung
Göttingen

A. TONOLO

Seminario Matematico
Università di Padova

C. TRUESELL

Istituto Matematico „Salvatore Pincherle“
Università di Bologna

H. VILLAT

47, bd. A. Blanqui
Paris XIII

CONTENTS

GREEN, A. E., & R. S. RIVLIN, The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory. Part I	1
ROGERS, M. H., The isothermal Expansion of a Gas Cloud into a Non-uniform Atmosphere	22
BRAND, LOUIS, The Pi Theorem of Dimensional Analysis	35
KREYSZIG, ERWIN, Über ein System partieller Differentialgleichungen .	46
QUAN, PHAM MAU, Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat	54
OSER, HANSJÖRG, Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten	81